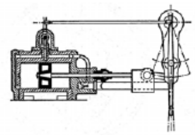
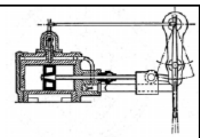
Chapitre 5



Stabilité des systèmes

Plan



- 1. Condition générale de stabilité
- 2. Critère de Routh-Hurwitz
- 3. Critère simplifié de Nyquist (critère du revers)

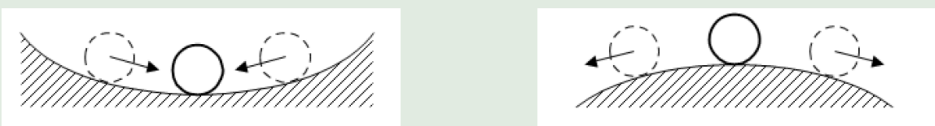
Plan

- **1. Condition générale de stabilité**
- 2. Critère de Routh-Hurwitz
- 3. Critère simplifié de Nyquist (critère du revers)

Condition générale

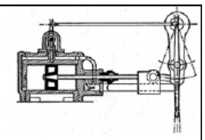
- **Définition**

Un système est stable s'il retourne naturellement vers son état d'équilibre après en avoir été écarté.



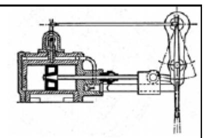
Système stable Système instable

Condition générale



- **<u>Définitions :</u>**
  - **<u>Stabilité :</u>** retour à la position d'équilibre de départ *[apériodique ou oscillatoire]*
  - **<u>Instabilité :</u>** système s'éloignant infiniment de la position d'équilibre *[apériodique ou oscillatoire]*
  - **<u>Limite de stabilité :</u>** système dans un voisinage fini de la position d'équilibre *[astable ou juste oscillant]*

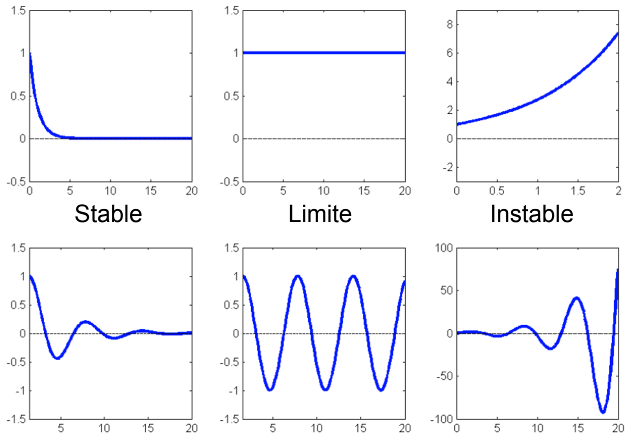
Condition générale



- **<u>Conditions Nécessaires et Suffisantes</u>**
  - Un système linéaire est stable lorsque :
    - Sa réponse indicielle prend une valeur finie en régime permanent ;
    - Sa réponse impulsionnelle tend vers 0 ;
    - Sa réponse a une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude finie

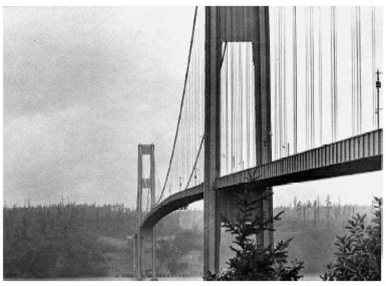
Condition générale

- **Exemples**



Condition générale

- **Exemple d'un système instable**



Le pont Tacoma Narrows
(*au Puget Sound, Washington, USA*)
au moment ou les oscillations ont commencé.

Le pont Tacoma Narrows
au moment de la catastrophe.

NOTE:
Le pont était ouvert au trafic le 1 juillet 1940. Il oscillait à chaque fois que le vent se levait. Après 4 mois (i.e. 7 novembre 1940), un vent a produit des oscillations qui augmentèrent en amplitude jusqu' à la l' effondrement du pont.

Condition générale

- **<u>Définition mathématique (1) :</u>**
  - Un système est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 lorsque *t* tend vers l'infini :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} s_{imp}(t) = h(t) = 0$$

Condition générale

- **<u>Conséquences sur les pôles de la FT</u>**
  - Soit ***T*** la fonction de transfert d'un système industriel. Alors :

$$T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Numérateur caractérisé par des **zéros**

Dénominateur caractérisé par des **pôles**

Condition générale

- **Conséquences sur les pôles de la FT**
  - La réponse impulsionnelle est alors donnée par

$$s_{imp}(t) = h(t) = L^{-1}\{T(p)\}$$

  - Décomposition en éléments simples

$$T(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)} = \sum_i^n \frac{A_i}{p-p_i}$$

avec les p_i les pôles de ***T***

Condition générale

- **Conséquences sur les pôles de la FT**
  - Et donc

$$L^{-1}\{T(p)\} = h(t) = \sum_{i=1}^n e^{p_i t}$$

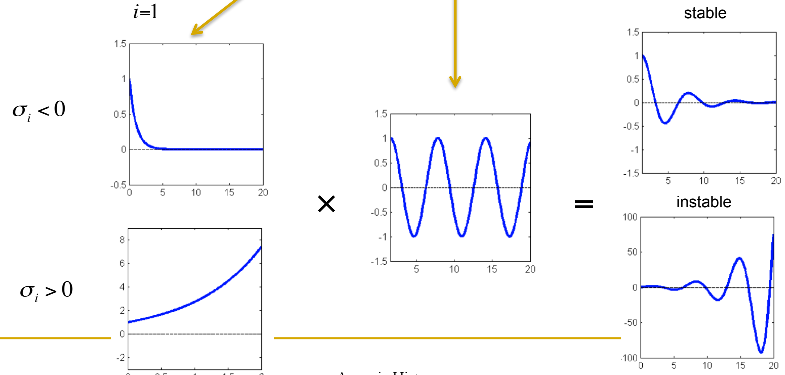
  - Les $\boldsymbol{p_i}$ sont de nature complexe

$$h(t) = \sum_{i=1}^n e^{\mathrm{Re}(p_i)t} e^{j\,\mathrm{Im}(p_i)t} = \sum_{i=1}^n e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$$

Condition générale

- **<u>Conséquences sur les pôles de la FT</u>**

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\sigma_i t} \times e^{j\omega_i t}$$



Condition générale

- **<u>Conséquences sur les pôles de la FT</u>**
  - On en déduit donc le critère de stabilité suivant :

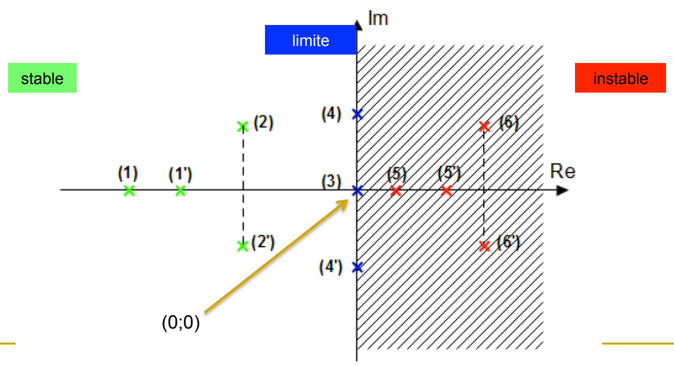
Un système (linéaire) est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative

$$\boxed{\mathrm{Re}(p_i) < 0}$$

Condition générale

Conséquences sur les pôles de la FT

- Lieu des pôles (lieu d'Evans):

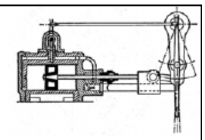


Condition générale

Remarques

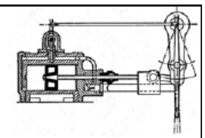
- Ces critères de stabilité restent difficiles à utiliser en pratique en particulier pour les systèmes d'ordre élevé (calcul des pôles)
- On préfèrera alors soit **le critère algébrique de Routh-Hurwitz** lorsque la T_{BF} est connue
- **Le critère du revers** (Nyquist simplifié) lorsque seule la T_{BO} est connue

Plan



- 1. Condition générale de stabilité
- 2. <u>**Critère de Routh-Hurwitz**</u>
- 3. Critère simplifié de Nyquist (critère du revers)

Critère de Routh-Hurwitz



- <u>**Principe :**</u>

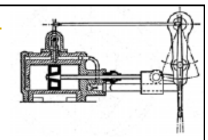
$$T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Numérateur caractérisé par des **zéros**

Dénominateur caractérisé par des **pôles**

  - On appelle critère de Routh le critère algébrique permettant **d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur D(p)** de sa fonction de transfert (en boucle fermée pour les systèmes asservis)

Critère de Routh-Hurwitz

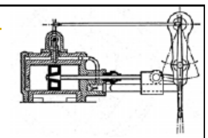


- **Principe :**
  - Ce critère est issu d'une méthode qui permet de décompter le nombre de racines à partie réelle positive ou nulle du polynôme D(p).

$$D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n$$

  - Il s'applique en **deux temps et ne nécessite pas le calcul des pôles.**

Critère de Routh-Hurwitz

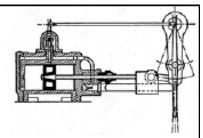


- **1re partie du critère**
  - Tous les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ de *D* doivent être de même signe et non nuls

$$D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n$$

  - **Dans le cas contraire** le système est **instable**.

Critère de Routh-Hurwitz



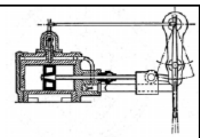
- **2nde partie du critère :**
  - On construit le tableau suivant :

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

Critère de Routh-Hurwitz



- **2nde partie du critère :**
  - On construit le tableau suivant :

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

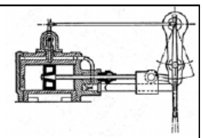
p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

La première ligne contient les coefficients des termes en p^{n-2k}, dans l'ordre des puissances décroissantes.

La deuxième ligne contient les coefficients des termes en p^{n-1-2k}, et se termine suivant la parité de n.

Critère de Routh-Hurwitz



2nde partie du critère :

- On construit le tableau suivant :

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

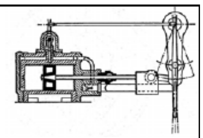
p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

La première ligne contient les coefficients des termes en p^{n-2k}, dans l'ordre des puissances décroissantes.

La deuxième ligne contient les coefficients des termes en p^{n-1-2k}, et se termine suivant la parité de n.

Critère de Routh-Hurwitz



2nde partie du critère :

- On construit le tableau suivant :

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

Les 2 premières lignes sont donc renseignées d'après le polynôme *D*.

Pas de calculs !

Critère de Routh-Hurwitz

2nde partie du critère :

- Les coefficients des lignes suivantes se calculent sous forme de déterminant:

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix} \qquad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix}}$$

- **Rappel :** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b$

- Si nécessaire, une case vide est prise égale à zéro.

Critère de Routh-Hurwitz

Condition de stabilité :

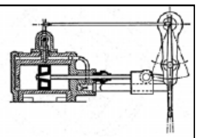
- Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne (colonne du pivot) sont strictement positifs.

Soit D(p) = $a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne, dite des pivots

Critère de Routh-Hurwitz



Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

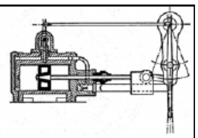
p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0,5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0,5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0,5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable



Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0,5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0,5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0,5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0,5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0,5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0,5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0,5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0,5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0,5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Case vide remplacée par un zéro
pour les calculs

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ ;$ $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5\ ;$ $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ ;$ $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5\ ;$ $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

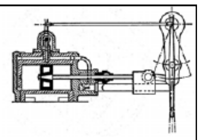
$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

$$\boxed{b_2 = \frac{-1\times(1\times1-1\times3)}{1} = 2}$$

Critère de Routh-Hurwitz



Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

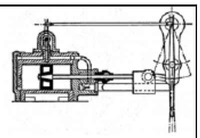
$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0{,}5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz



Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0{,}5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,;\qquad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5 \,;\qquad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,;\qquad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5 \,;\qquad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

$$\boxed{b_0 = \frac{-1\times(1\times 0 - 1\times 1)}{1} = 1}$$

Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

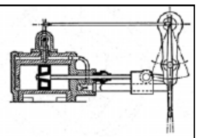
$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz



- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,;$ $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

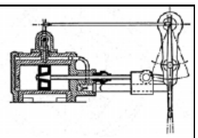
$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5\,;$ $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

$$\boxed{c_1 = \frac{-1\times(1\times1-2\times1)}{2} = 0{,}5}$$

Critère de Routh-Hurwitz



- **Exemple 1 :**

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,;$ $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5\,;$ $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Critère de Routh-Hurwitz

Exemple 1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

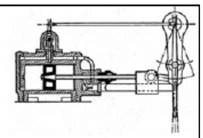
$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

(1) (2)

Tous les coefficients de la colonne du pivot sont positifs



Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 2 :**

$D_1(p) = p^5 + 2.p^4 + 3.p^3 + 4.p^2 + 3.p + 1$

p^5	1	3	3
p^4	2	4	1
p^3	1	2,5	0
p^2	-1	1	0
p^1	3,5	0	
p^0	1		

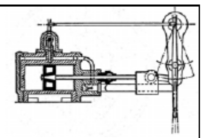
$b_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\,;$ $\quad b_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2{,}5$

$c_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} = -1\,;$ $\quad c_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$d_1 = \frac{-1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3{,}5\,;$ $\quad d_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$e_0 = \frac{-1}{3{,}5}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système instable



Critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple 2 :**

$D_1(p) = p^5 + 2.p^4 + 3.p^3 + 4.p^2 + 3.p + 1$

p^5	1	3	3
p^4	2	4	1
p^3	1	2,5	0
p^2	-1	1	0
p^1	3,5	0	
p^0	1		

$b_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\,;$ $\quad b_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2{,}5$

$c_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} = -1\,;$ $\quad c_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$d_1 = \frac{-1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3{,}5\,;$ $\quad d_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$e_0 = \frac{-1}{3{,}5}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système instable

Critère de Routh-Hurwitz

- **Avantage**
  - Pas besoin de calculer les pôles de la fonction de transfert
- **Inconvénients :**
  - Peut devenir calculatoire pour des ordres élevés
  - Nécessite pour les systèmes asservis la connaissance de la T_{BF}.

Plan

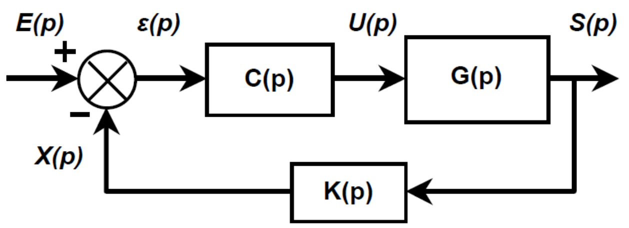
- 1. Condition générale de stabilité
- 2. Critère de Routh-Hurwitz
- 3. **Critère simplifié de Nyquist (critère du revers)**

Critère du revers

- **Principe :**
  - Statuer sur la stabilité d'un système asservi par la seule connaissance de sa $\boldsymbol{T_{BO}}$
  - Il s'agit d'un critère graphique nécessitant le tracé d'un des lieux suivants pour être appliqué :
    - Nyquist
    - Black
    - Bode

Critère du revers

- **Principe :**
  - Soit le système asservi suivant :



Alors : $\boxed{T_{BF}(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{CD(p)}{1+T_{BO}(p)} = \dfrac{C(p).G(p)}{1+C(p).G(p).K(p)}}$

Critère du revers

- **Principe :**
  - La stabilité dépend des pôles de la T_{BF} donc des racines de l'équation :

$$1+T_{BO}(p)=0$$

  - soit

$$T_{BO}(p)=-1 \quad \text{ou} \quad \boxed{T_{BO}(j\omega)=-1}$$

en régime harmonique

Critère du revers

- **Principe :**
  - La stabilité dépend des pôles de la T_{BF} donc des racines de l'équation :

$$1+T_{BO}(p)=0$$

-1+0j

  - soit

$$T_{BO}(p)=-1 \quad \text{ou} \quad \boxed{T_{BO}(j\omega)=-1}$$

en régime harmonique

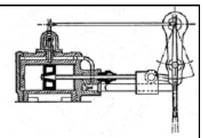
Critère du revers

- **Principe :**
  - On peut donc statuer sur la stabilité de la $\boldsymbol{T_{BF}}$ en étudiant **le lieu graphique de la $\boldsymbol{T_{BO}}$ par rapport au point de coordonnées (-1;0)** en régime harmonique (lieu de Nyquist)
  - Le point de coordonnées (-1;0) dans le lieu de Nyquist est appelé **point critique**

Critère du revers

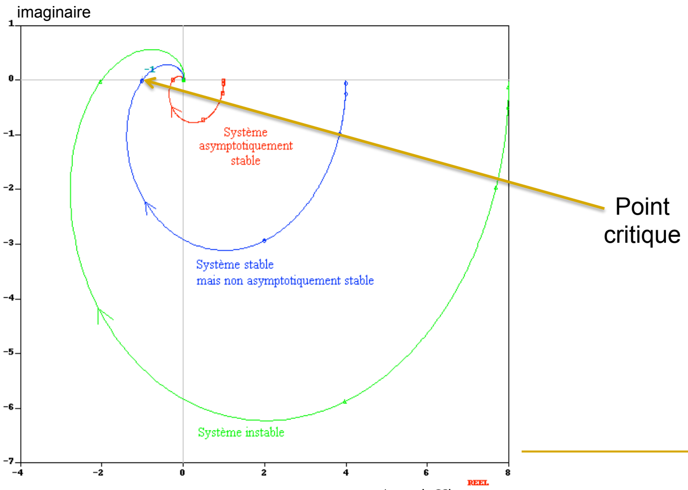
- **Enoncé du critère (lieu de Nyquist)**

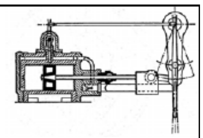
Un système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la $\boldsymbol{T_{BO}}$, **parcouru dans le sens des $\boldsymbol{\omega}$ croissants**, laisse le point critique **à gauche.**



Critère du revers

- **Illustrations**

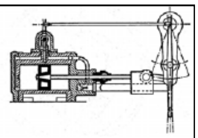




Critère du revers

- **Enoncé du critère**
  - En pratique, il est plus simple d'appliquer le critère sur le diagramme de Black (construction souvent plus simple que Nyquist)
  - Les coordonnées du point critique sont alors **(-180°;0dB)**
  - L'énoncé du critère est alors la suivante :

Critère du revers

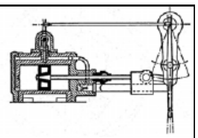


- **Enoncé du critère (lieu de Nyquist)**

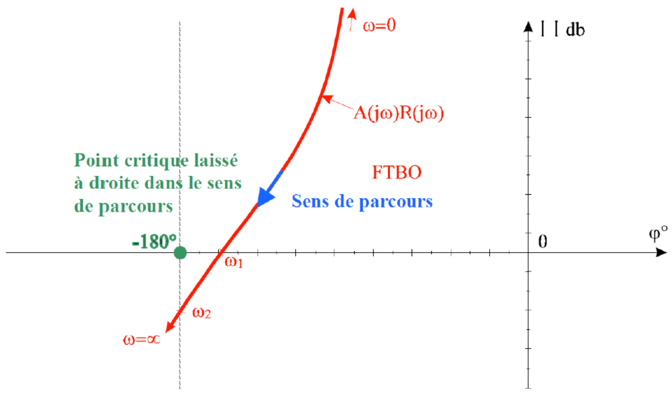
Un système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si le lieu de Black de la FTBO, **parcouru dans le sens des ω croissants**, laisse le point critique **à droite.**

Aymeric Histace 57

Critère du revers



- **Illustration**



Aymeric Histace 58

Critère du revers

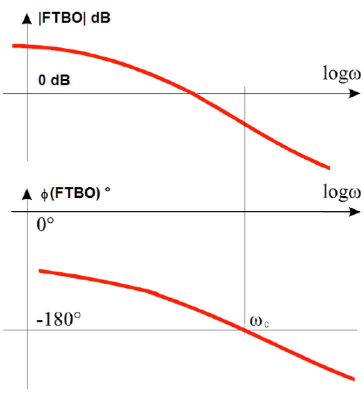
- **Dans le lieu de Bode**
  - Le point critique correspond à 2 horizontales :
    - L'horizontale à 0 dB en gain
    - L'horizontale à -180° en phase

CNS de stabilité : critère du revers

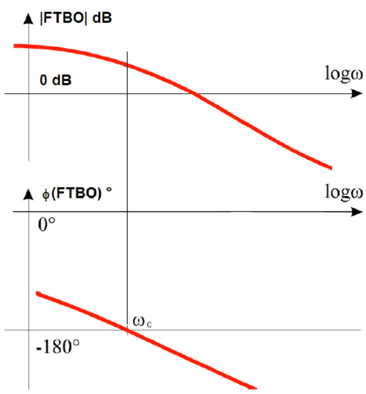
Soit ω_c la pulsation critique pour laquelle $\varphi(FTBO(\omega_c)) = -180^o$. Le système est stable si et seulement si le gain en ce point est inférieur à 1 (ou 0 dB)

Critère du revers

- **Illustrations**



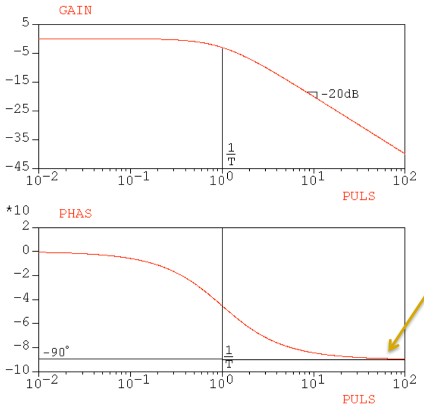
Système stable



Système instable

Critère du revers

- **Rq sur les systèmes d'ordre 1 et 2 :**
  - **Bode d'un premier ordre**

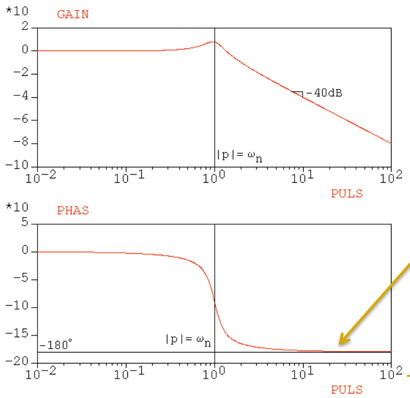


La phase tend asymptotiquement vers -90°

Toujours stable en BF

Critère du revers

- **Rq sur les systèmes d'ordre 1 et 2 :**
  - **Bode d'un premier ordre**



La phase tend asymptotiquement vers -180°

Mathématiquement toujours stable en BF (pas forcément vrai en pratique !!)