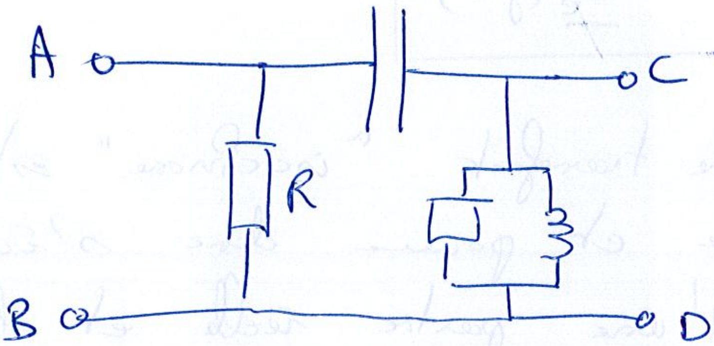
Chapitre 3 - Fonction de Transfert et Diagramme de Bode

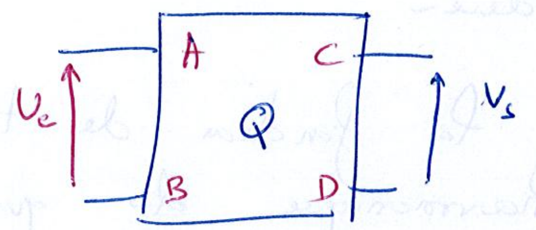
1. Introduction

Déf : On appelle quadripôle un système électrique accessible par l'intermédiaire de 4 bornes.

Ex :



Notation :



Rq : Un quadripôle est dit passif si l'ensemble des composants électriques le constituant est de type passif (Résistance, Condensateur, Bobine)

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré l'étude de ce type de système en régime sinusoïdal à fréquence fixe (exemple $f = \frac{2\pi}{\omega} = 50\,Hz$ pour EDF).
Dans ce chapitre, nous considérons l'étude de ce type de système en régime sinusoïdal à fréquence variable dans le but d'aborder ensuite la problématique du filtrage.

2. Fonction de transfert

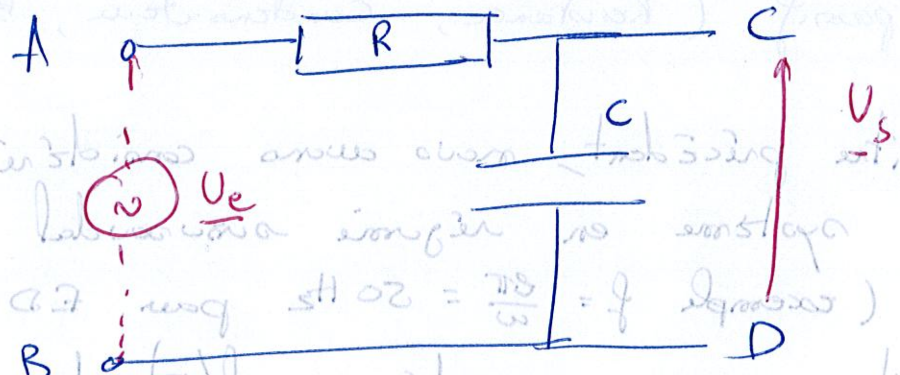
Déf : On considère le quadripôle précédent alimenté par une source de tension sinusoïdale* entre A et B (*de fréquence variable)

On peut alors définir la fonction de transfert en régime harmonique du quadripôle Q telle que :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}(j\omega)}{\underline{U_e}(j\omega)}}$$

Rq : La fonction de transfert "isochrone" est de type complexe et pourra donc s'écrire sous la forme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Exemple : Calculer la fonction de transfert en régime harmonique du quadripôle suivant :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s(j\omega)}{\underline{U_e}(j\omega)}$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_s(j\omega) = \frac{-\frac{j}{C\omega}}{-\frac{j}{C\omega} + R}\,\underline{U}_e(j\omega)$$

d'où $$\underline{U}_s(j\omega) = \frac{\frac{-j}{C\omega}}{\frac{-j + RC\omega}{C\omega}}\underline{U}_e = \frac{-j}{-j+RC\omega}\underline{U}_e = \frac{1}{1+jRC\omega}\,\underline{U}_e(j\omega)$$

Finalement donc $$\boxed{\frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{1}{1+jRC\omega}}$$

Il devient donc possible, connaissant la fonction de transfert d'un quadripôle d'étudier son "comportement" en fonction de la fréquence ($\propto \omega$) du signal sinusoïdal d'entrée.

Cette étude peut se faire de deux manières :

(1) On étudie dans le plan complexe les variations de $\mathrm{Im}(\underline{H}(j\omega))$ en fonction des variations de $\mathrm{Re}(\underline{H}(j\omega))$

→ Courbe paramétrée en ω

Il s'agit du diagramme de Nyquist.

(2) On étudie séparément le gain de $H(j\omega)$ et la phase (argument) associé en traçant deux courbes

Il s'agit du diagramme de Bode.

3. Diagramme de Bode.

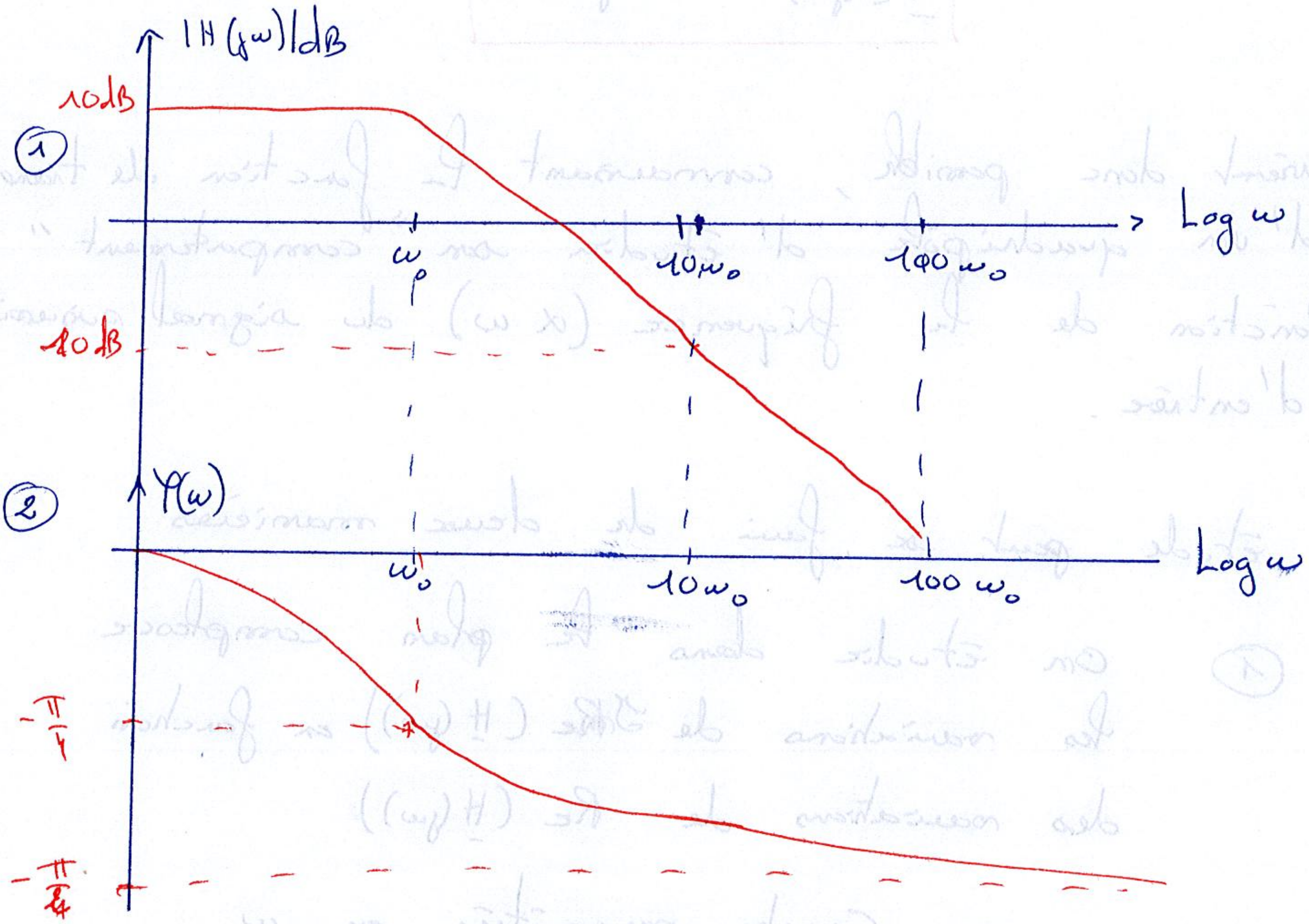
La représentation du diagramme de Bode d'une fonction de transfert se fait donc par le tracé de deux fonctions :

$$① \ \omega \mapsto |\underline{H}(j\omega)|_{dB}$$

Rq : le module est exprimé en $\underline{dB}$

$$② \ \omega \mapsto \underbrace{\arg(\underline{H}(j\omega))}_{\varphi(\omega)}$$

Illustration



Rq : * L'échelle en abscisse est logarithmique ; on verra plus loin l'intérêt de ce choix avec l'étude de fonction élémentaire.

$$* \ |H(j\omega)|_{dB} = 20 \operatorname{Log} |\underline{H}(j\omega)|$$

↑ base 10

Interprétation

Les courbes en ~~bleu~~ rouge "indique" ce qui se passe en sortie du système pour une fréquence donnée :

Ainsi, pour l'exemple considéré :

* Tout signal d'entrée dont la fréquence de la sinusoïde est comprise entre 0 et ω_0 rad.s^{-1}, est amplifié de 10 dB.

  Tandis que la phase du signal de sortie est retardée d'une valeur comprise entre 0° et 45°.

* Tout signal d'entrée ____________ ____________ entre ω_0 et $+\infty$ subit une atténuation de <u>$-$ 20 dB par décade</u>

  Tandis que la phase du signal de sortie est retardée d'une valeur comprise entre 45° et +90°.

Rq : Ajouter 10 dB revient à multiplier l'amplitude du signal d'entrée par $10^{10/10}$ soit 3,16.

Retrancher 10 dB revient à diviser l'amplitude du signal d'entrée par 3,16.

$$20 \log A = 10 \text{ dB} \iff A = 10^{10/20} = 3,16$$

$$20 \log A = -10 \text{ dB} \iff 20 \log \frac{1}{A} = 10 \text{ dB}$$

d'où $A = \frac{1}{3,16}$

Exercices

① On considère un générateur de tension tel que :

$$U_e(t) = U_{e\,max} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad f = 1\,kHz$$

En sortie, la tension $U_s(t)$ est atténuée de 3 dB et retardée de 45°. Donner l'expression temporelle de $U_s(t)$

① : Atténuation de 3 dB.

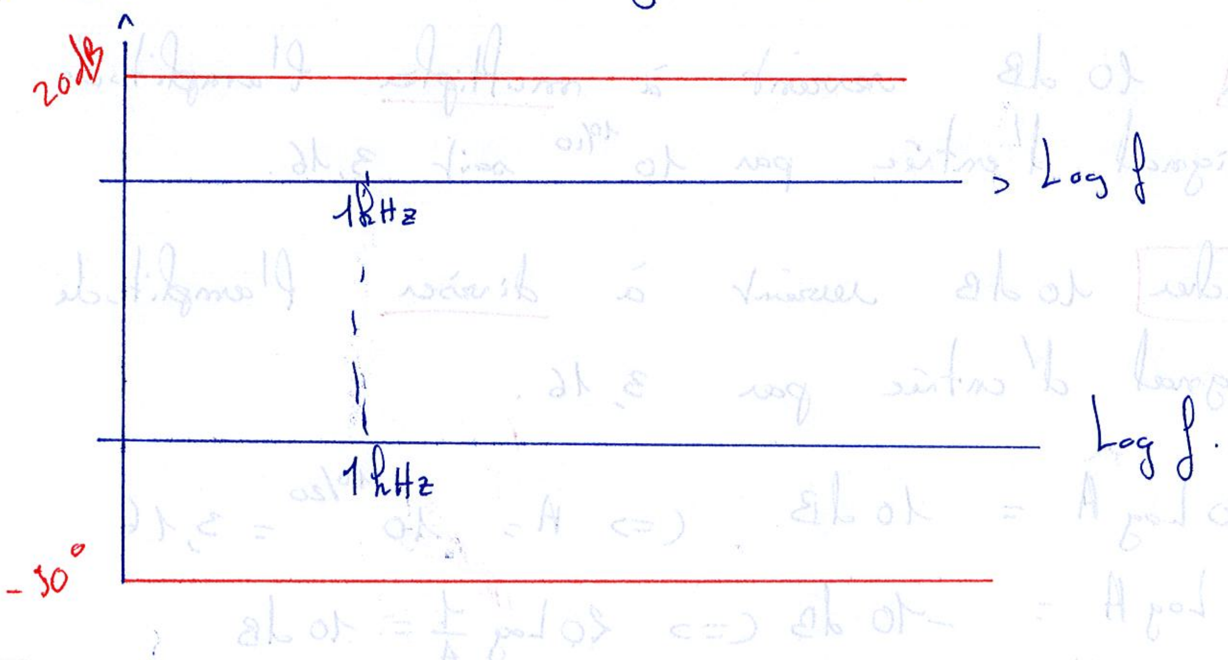
$$20 \log A = -3\,dB \iff A = 10^{-3/20} = 0{,}707 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{donc} \quad U_{s\,max} = \frac{U_{e\,max}}{\sqrt{2}}$$

② : Retard de 45° : par rapport à U_e, il y a donc un déphasage de ⊖45° pour U_s.

Forcément : $\boxed{U_s(t) = \frac{U_{e\,max}}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - 45°)}$

② On considère le diagramme de Bode suivant :



On met en entrée le signal $U_e(t) = U_{e\,max} \sin(\omega t)$, donner l'expression temporelle de $U_s(t)$.

<u>Au niveau du gain</u> : $\forall f$ le signal d'entrée est amplifié de 20 dB. L'amplitude est donc multipliée par $10^{20/20} = 10$.

<u>Au niveau de la phase</u> : $\forall f$ le signal d'entrée est déphasé de $-90°$ (retardé de 90°)

d'où $\boxed{U_s(t) = 10 \times U_{e\,max} \sin(\omega t - 90°)}$

4. Fonctions de transfert élémentaires et diagramme de Bode associé

4.1. $H(j\omega) = cte$

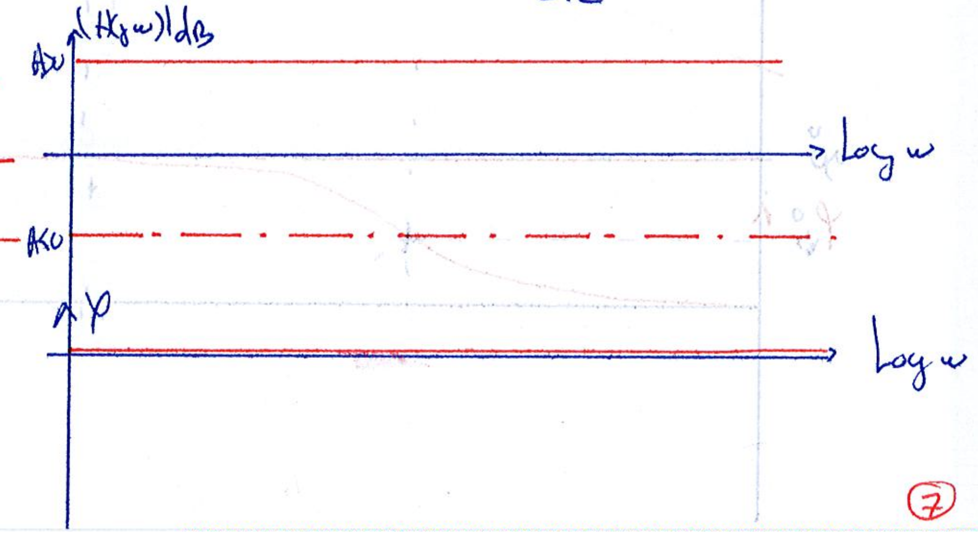
① Calcul du gain (en dB) fonction de ω.

$$20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log (cte) = \underline{A \text{ dB}}$$

② Calcul de l'argument fonction de ω

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(cte) = \arctan \frac{0}{cte} = \underline{0°}$$

Diagramme de Bode



Si $cte < 1$ $A < 0$

Si $cte > 1$ $A > 0$

4.2. $\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Gain en dB et argument

$$|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = 20 \operatorname{Log} |\underline{H}(j\omega)| = 20 \operatorname{Log} \left| j\frac{\omega}{\omega_0} \right| = 20 \operatorname{Log} \frac{\omega}{\omega_0} = G.$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \operatorname{artan} \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{0} = \cancel{x} + 90°$$

Etude asymptotique :

$\omega = 0$ $\quad |H(j\omega)|_{dB} = 20 \operatorname{Log} 0 = -\infty$

$\varphi = 90°$

$\omega = \omega_0$ $\quad \boxed{G = 20 \operatorname{Log} \frac{\omega_0}{\omega_0} = 0 \text{ dB}.}$

$\varphi = +90°$

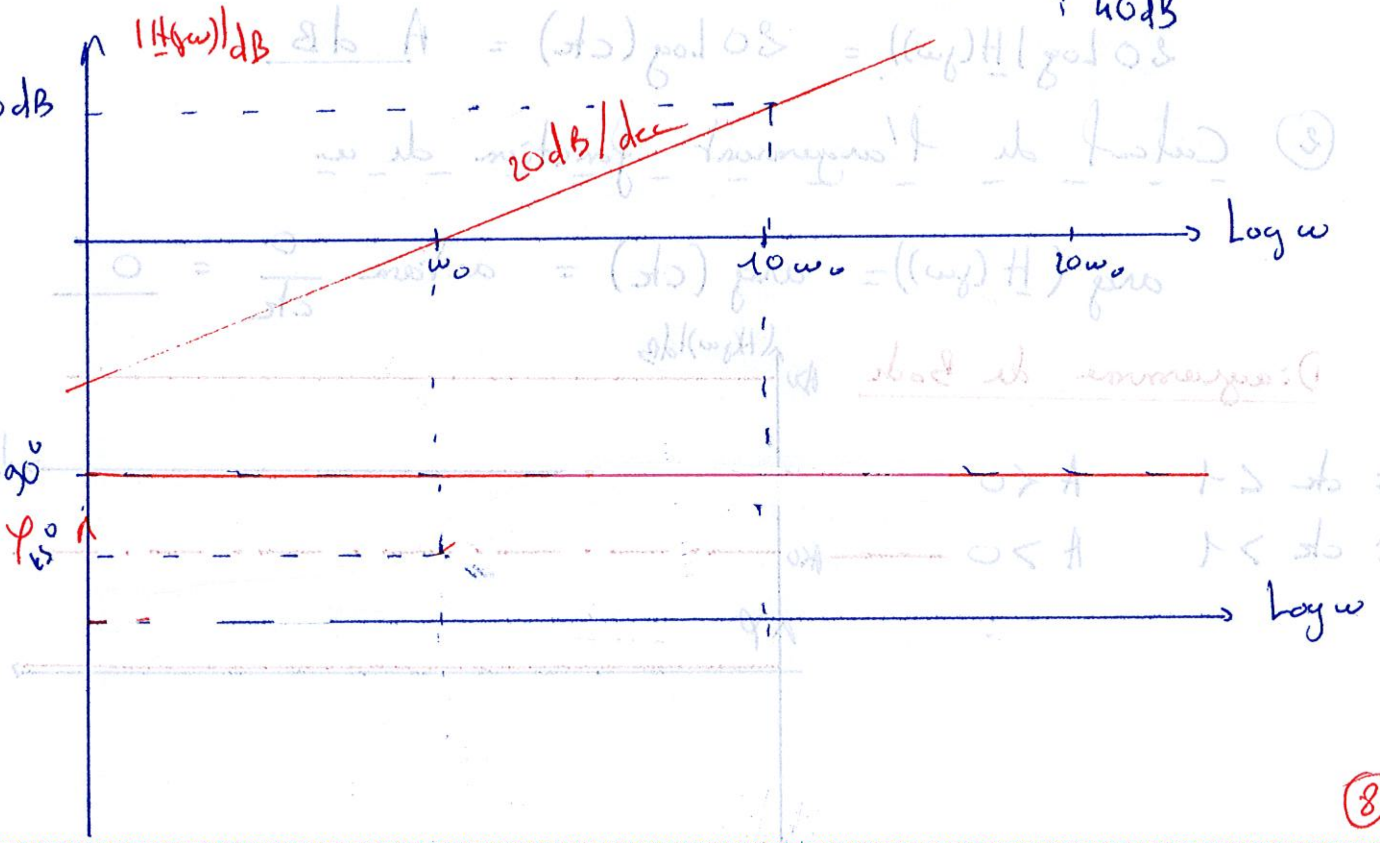
$\omega = 10\omega_0$ (une décade) : $\quad G = 20 \operatorname{Log} \frac{10\omega_0}{\omega_0} = 20 \text{ dB}.$

$\varphi = 90°$

$\omega \to +\infty$ $\quad G = 20 \operatorname{Log} \infty = +\infty.$

$\varphi = \operatorname{artan} \infty = 90°$

Tracé:

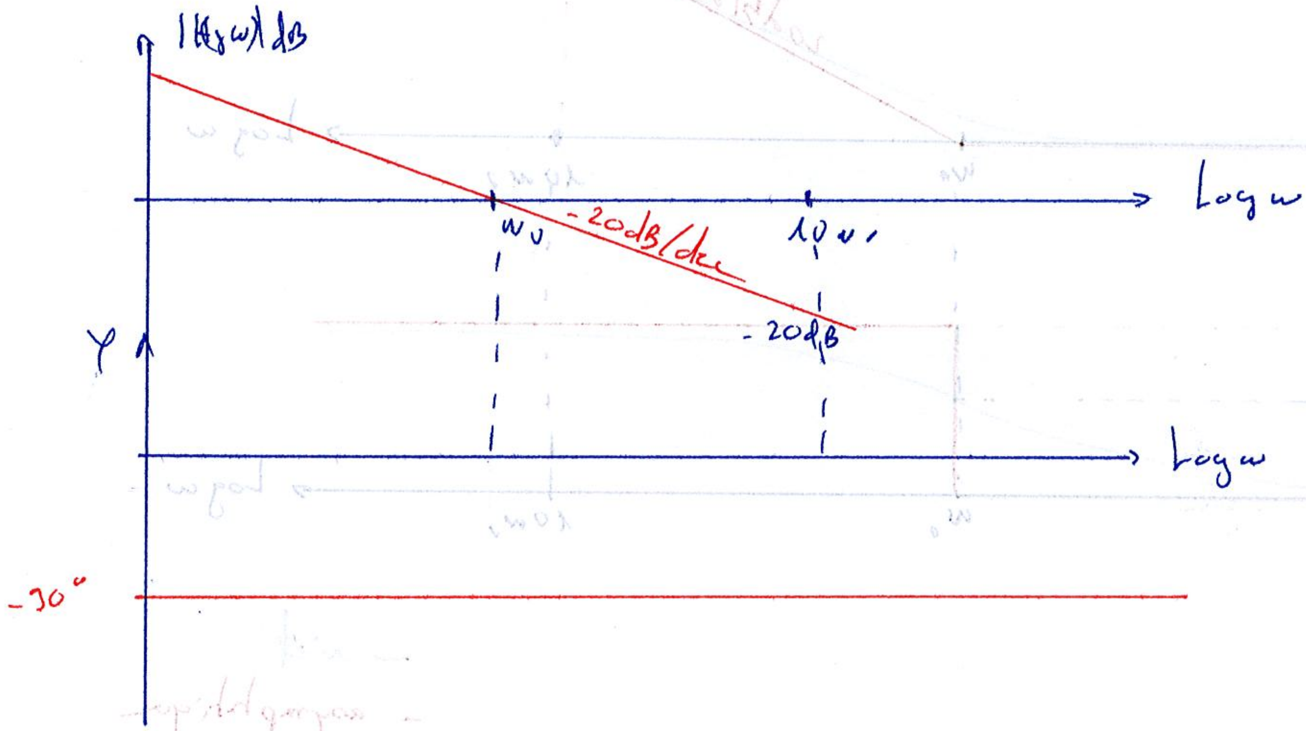


4.3. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

GdB : $20 \log \left| \dfrac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = -20 \log \left(j \dfrac{\omega}{\omega_0} \right)$

φ $\quad \varphi = \arg \left(\dfrac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \right) = -\arg \left(j \dfrac{\omega}{\omega_0} \right)$

On peut donc déduire le Bode de cette fonction de transfert de la précédente :



4.4. $\underline{H}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}$

GdB $\quad G_{dB} = 20 \log \left| 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} \right| = 20 \log \sqrt{1^2 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

argument $\quad \varphi = \arctan \dfrac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = \arctan \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Etude asymptotique.

$\omega = 0 \qquad G_{dB} = 20 \log 1 = 0$ dB

$\qquad \varphi = \arctan 0 = 0°$

$\omega = \omega_0 \qquad G_{dB} = 20 \log \sqrt{2} = 3$ dB

$\qquad \varphi = \arctan 1 = 45°$

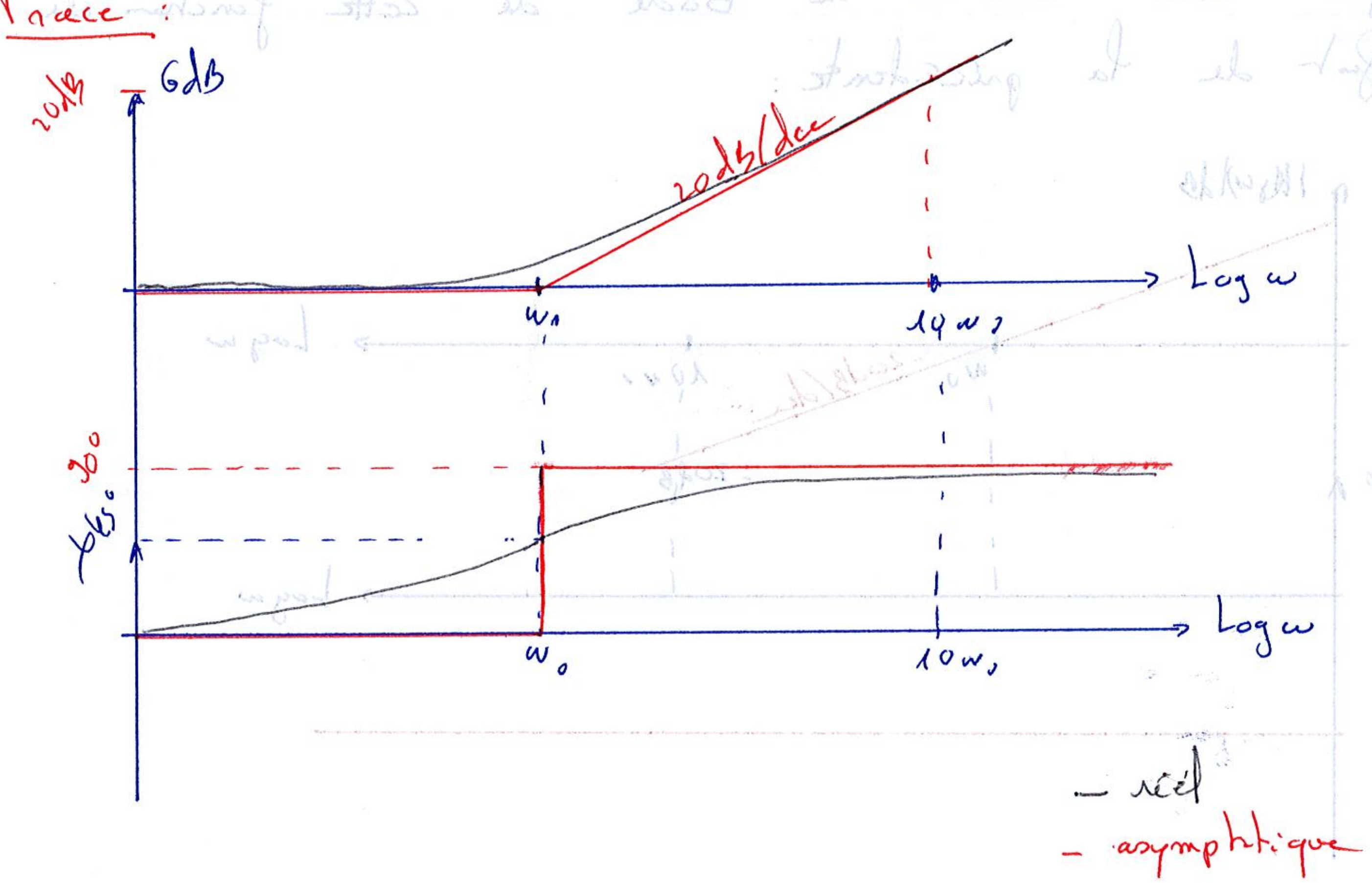
$\omega = 10\,\omega_0$ $\quad G_{dB} = 20 \operatorname{Log} \sqrt{1^2 + 100^2} \simeq 23 \text{ dB}$

$$\varphi = \arctan 10 = 84{,}6^\circ$$

$\omega \to +\infty$ $\quad G_{dB} = 20 \operatorname{Log} \infty = \infty$

$$\varphi = \arctan +\infty = 90^\circ \quad \text{(asymptote)}$$

Tracé :

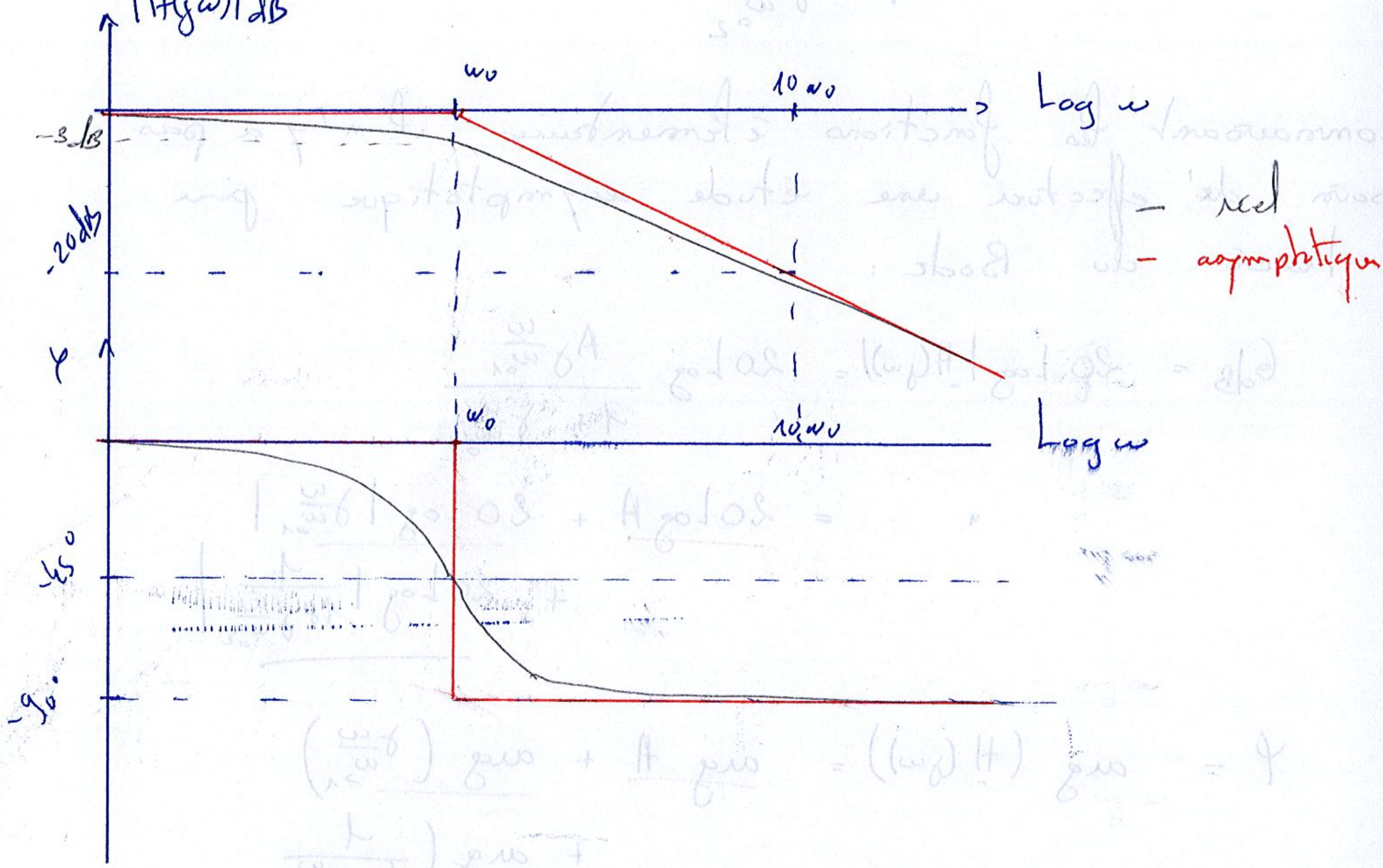


4.5 $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

On note que $G_{dB} = -20 \operatorname{Log} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

et $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$

On peut donc déduire le diagramme de Bode du précédent :



5. Composition de fonctions élémentaires.

Les 5 fonctions précédentes sont considérées comme les éléments types les plus rencontrés. Dans la pratique, elles peuvent néanmoins être composées.

Ex :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jA\frac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

Connaissant les fonctions élémentaires, il n'y a pas besoin d'effectuer une étude asymptotique pour le tracé du Bode :

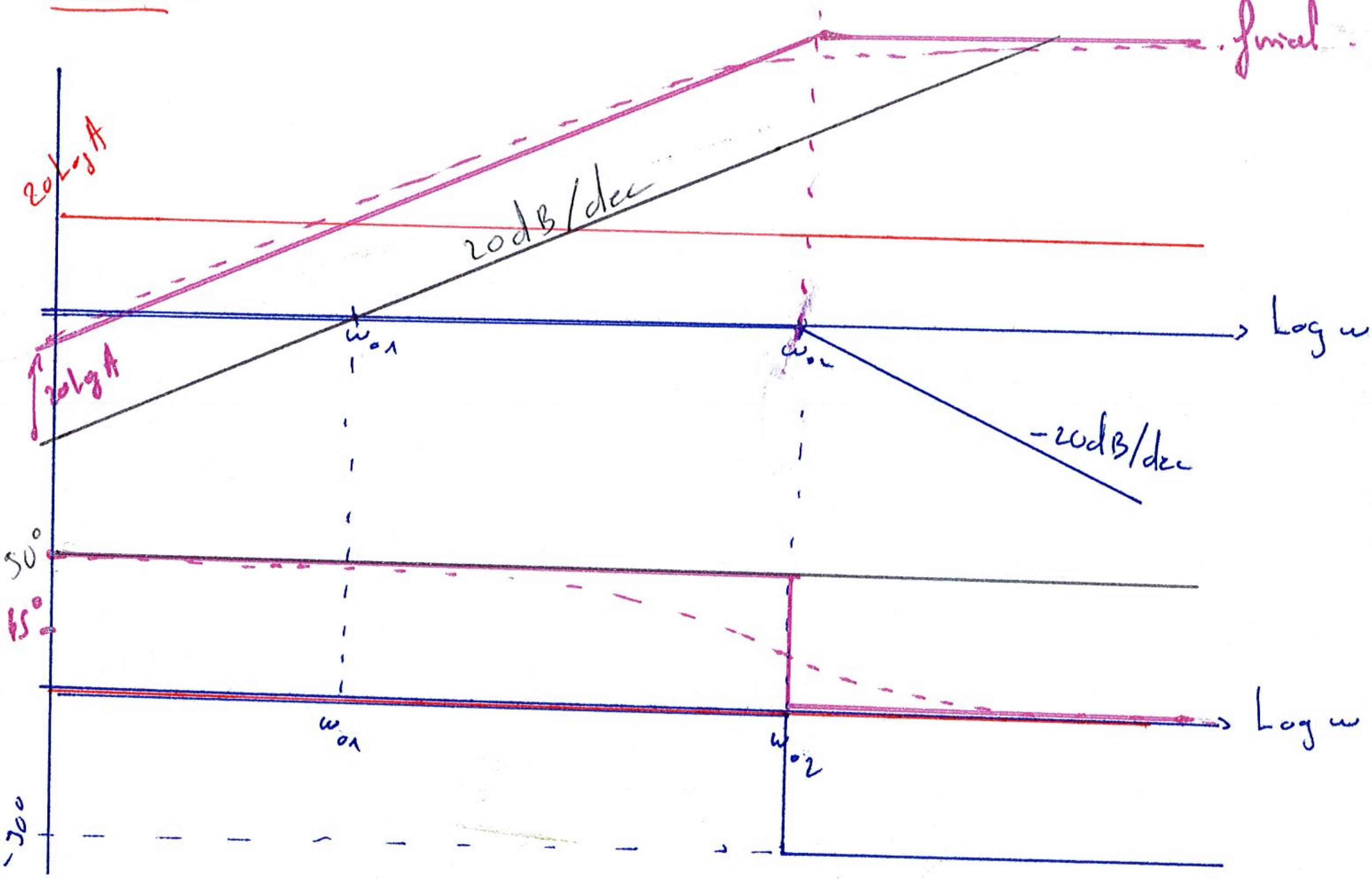
$$G_{dB} = 20 \operatorname{Log} |\underline{H}(j\omega)| = 20 \operatorname{Log} \frac{Aj\frac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

$$\text{"} \quad = \underline{20 \operatorname{Log} A} + \underline{20 \operatorname{Log} \left|j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right|} + \underline{20 \operatorname{Log} \left|\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}\right|}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \underline{\arg A} + \underline{\arg\left(j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)} + \underline{\arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}\right)}$$

On construit donc le diagramme de Bode en sommant ceux des fonctions élémentaires associées.

Tracé :



Exercices : * Tracé le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :

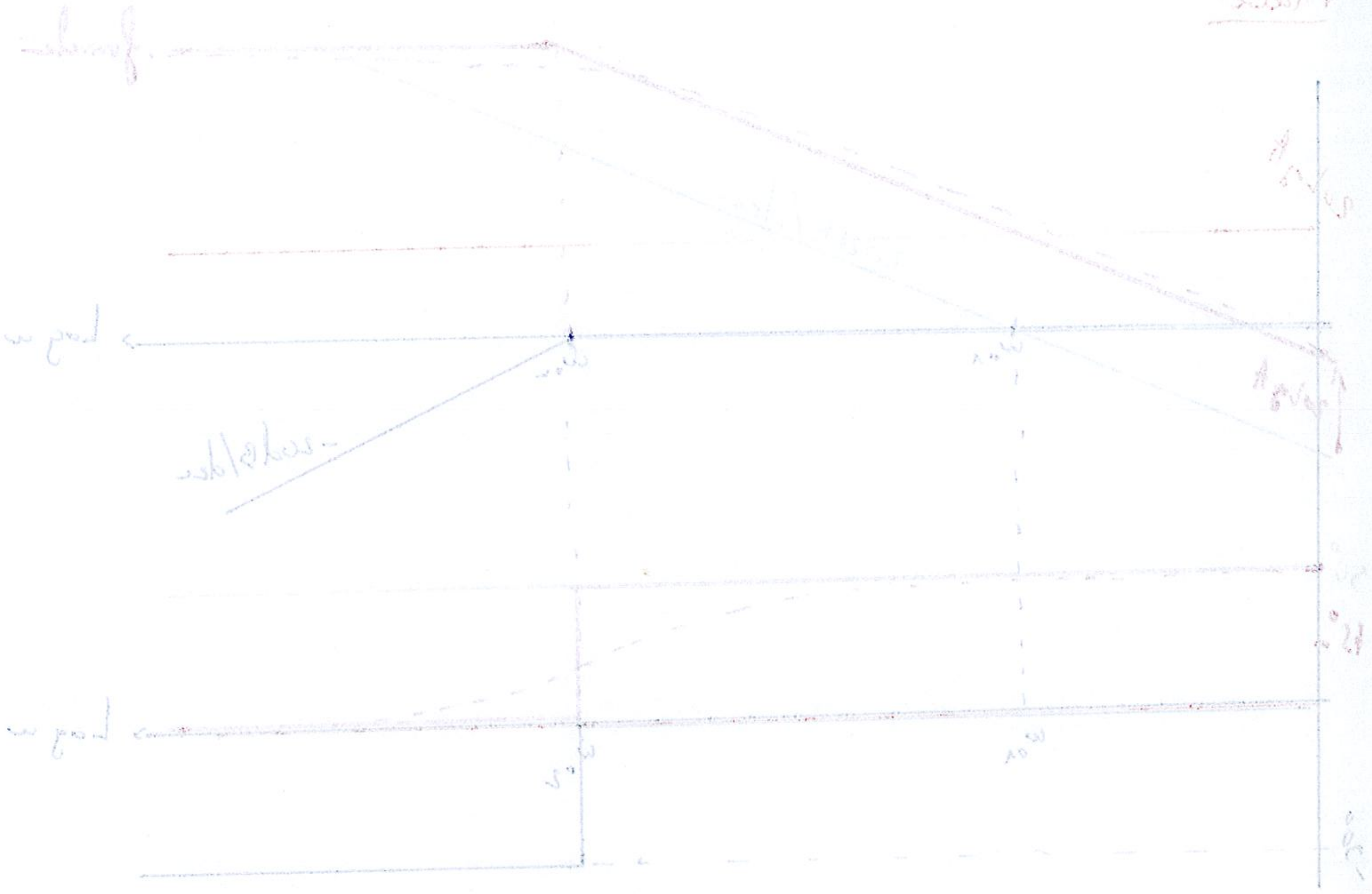
$$\underline{H}(j\omega) = 0,1 \times \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

* Puis de

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)} \quad \text{avec } \omega_{02} = 10\,\omega_{01}.$$

* Reprendre le montage du début et tracé son diagramme de Bode.

Tracé



Exercice : * Tracé le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = 0,1 \times \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

* Puis de

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)} \quad \text{avec } \omega_{02} = 10\,\omega_{01}$$

* Reprendre le montage du début et tracer son diagramme de Bode.