

2011

Rapport de stage



Encadré par Aymeric HISTACE
Juan Sebastian SILVA QUINTERO
20/06/2011 à 18/07/2011

Sommaire

1.	Problématique	4
2.	Étude synthétique de l'article de Langlois et Daudé.....	5
2.1	Modèle de croissance	7
2.1.1.	Modèle de croissance à source infinie.	7
2.1.2.	Modèle de croissance à source limitée.	8
2.2	Modèle logistique déterministe ou probabiliste	10
2.2.1	Simulation spatialisée du modèle logistique discret.....	11
2.3	Modèle de diffusion par front	12
2.3.1	Modèle théorique du front circulaire.....	12
2.4	Modèle de croissance-diffusion.....	13
2.4.1	Modèle continu de Croissance-Diffusion	13
2.4.2	Modèle discret de Croissance-Diffusion.....	14
2.5	Modèle Spatio-temporel de diffusion	14
3.	BENCHMARKING.....	16
3.1	Modèle logistique discret	16
	Diagramme de flux	16
	Simulations	17
3.2	Modèle de diffusion par front	19
	Diagramme de flux	19
	Simulations	20
3.3	Modèle spatio-temporel.....	23
	Diagramme de flux	23
4.	Enrichissement des modèles	27
4.1	Modèle de diffusion par front	27
	Diagrammes de flux.....	27
	Algorithme	28
4.2	Modèle de diffusion spatio-temporel.....	31
5.	Conclusions et perspectives	37
6.	Bibliographie.....	38

Table des figures

Figure 1. Règle d'acquisition.....	7
Figure 2. Courbe en S.....	9
Figure 3. Simulation. Modèle logistique discret.....	11
Figure 4. Simulation. Modèle par front.....	12
Figure 5. Simulation. Modèle SxT.....	15
Figure 6. Diagramme de flux. Modèle logistique discret.....	16
Figure 7. Image d'origine. Modèle logistique discret.....	17
Figure 8. Simulation. Modèle logistique discret. 25, 50, 75, 100 itérations.....	18
Figure 9. Courbe. Modèle de diffusion logistique.....	18
Figure 10. Diagramme de flux. Modèle par front.....	19
Figure 11. Image d'origine. Cercle.....	20
Figure 12. Simulation. Modèle par front. 6, 12, 18, 24 itérations.....	21
Figure 13. Simulation. Modèle par front. 30 itérations.....	21
Figure 14. Comparaison. Surface affectée selon modèle et selon l'image.....	22
Figure 15. Diagramme de flux. Modèle SxT.....	23
Figure 16. Image d'origine. Cercle.....	24
Figure 17. Simulation. Modèle SxT. 6, 12, 18, 24 itérations.....	26
Figure 18. Simulation. Modèle SxT. 30 itérations.....	26
Figure 19. Diagramme de flux. Extension diffusion par front. Direction.....	27
Figure 20. Simulation. Modèle par front. Direction $x=-1; y=1$. 6, 12, 18, 24 itérations.....	29
Figure 21. Simulation. Modèle par front. Direction $x=1; y=0$. 6, 12, 18, 24 itérations.....	30
Figure 22. Simulation. Modèle par front. Direction $x=1; y=0$. 30 itérations.....	30
Figure 23. Diagramme de flux. Modèle SxT.....	31
Figure 24. Image d'origine. Rue.....	33
Figure 25. Simulation. Rue. 6, 12, 18, 24 itérations.....	34
Figure 26. Simulation. Rue. 30 itérations.....	34
Figure 27. Image d'origine. Feuillage.....	35
Figure 28. Image des contours obtenue au moyen de la fonction indicatrice de Perona-Malik.....	35
Figure 29. Simulation. Feuillage. 8, 16, 24, 32 itérations.....	36
Figure 30. Simulation. Feuillage. 40 itérations.....	36
Figure 31. Simulation. Feuillage. 100 itérations.....	37

1. Problématique

Ce stage a eu lieu dans le cadre d'un projet conjoint entre le laboratoire ETIS (Equipe Traitement de l'information et Systèmes) et le laboratoire L3i (Equipe Traitement de l'information et Systèmes). Le projet est intitulé GEODIFF et son but est de mener une étude des processus de diffusion géographique.

Le projet GEODIFF s'intègre dans un contexte où la mise en place de solutions rapides devient urgente pour compenser la dégradation de l'environnement occasionnée par l'homme. Cependant, la dégradation des écosystèmes obéit à des phénomènes complexes, naturels ou non, tels que le ruissellement de l'eau, la propagation d'un champignon dans une plantation, ou celle d'un feu de forêt. Elle nécessite, d'une part, la prise en compte du phénomène physique sous-jacent (diffusion) et, d'autre part, l'exploitation à l'échelle macroscopique d'un ensemble de données (mesures) acquises à une échelle inférieure.

Du point de vue physique, ces phénomènes naturels complexes répondent à des lois de propagation pouvant être décrit au moyen de phénomènes sous-jacents tels que la diffusion [Langlois et Daudé, 2007] et ainsi être mieux appréhendés.

L'idée forte et originale du projet GEODIFF est de mieux appréhender les processus de dégradation, phénomènes naturels encore mal maîtrisés, en développant un système multi-agents (SMA) couplé à un modèle de diffusion spatio-temporelle (EDP), prenant en compte non seulement la physique du processus décrit (écoulement, diffusion thermique) et des informations localisées et distribuées, mais également les contraintes extérieures telles que par exemple l'aménagement, ou les caractéristiques du sol.

Pour atteindre ce but, les mécanismes afférents aux phénomènes de dégradation sont de mieux en mieux compris au travers de l'étude de leurs modes de diffusion géographique ; les modèles physiques proposés restent cependant généralement simples [Langlois et Daudé, 2007]. L'idée proposée est de les enrichir, en particulier par la prise en compte de contraintes identifiées au moyen des données extérieures collectées au travers du Système d'Information Géographique (SIG) et en s'appuyant sur les modèles de restauration d'images fondés sur l'utilisation d'équations de diffusion anisotrope.

Dans le cadre de ce stage, on propose de mieux comprendre ces modes de diffusion géographique et les modèles physiques qu'ils suivent, avec l'étude de l'article de Langlois et Daudé et un enrichissement des modèles de diffusion proposés.

2. Étude synthétique de l'article de Langlois et Daudé.

La diffusion est une figure majeure des dynamiques qui s'exercent dans l'espace géographique, elle participe à la création, au maintien et à la transformation des structures spatiales. La diffusion d'une grandeur dans un milieu physique continu est aussi un phénomène qu'a été très étudié en divers areas de la connaissance et des équations comme la diffusion de la chaleur ou celle de réaction-diffusion de Turing en sont des exemples significatifs, qui peuvent être utilisés dans bien d'autres domaines que celui d'origine. Mais le souci dans la diffusion d'une grandeur en géographie est qu'il opère dans un espace complexe qui est loin d'être continu et homogène.

La richesse et la complexité des phénomènes de diffusion géographique pousse ainsi à approfondir et à préciser les concepts qui permettent de définir précisément ce qu'est la diffusion géographique et comment la modéliser. Normalement, les géographes représentent la diffusion comme une courbe en S associée à la fonction logistique, mais le travail de Langlois et Daudé aide à montrer qu'il existe différents types de fonction et qu'il existe des phénomènes de diffusion spatiale qui ne suivent pas ce modèle.

Après avoir analysé les insuffisances du modèle logistique pour modéliser la diffusion, modèle essentiellement non spatial, ils ont défini un cadre théorique général de la diffusion géographique qui permet d'élaborer une classe de spécimens (modèles) assez générale de modèles de diffusion. L'équation de ce modèle permet de s'adapter à de nombreuses problématiques géographiques et est destinée à être incorporée à des automates cellulaires ou des SMA appliqués à la géographie.

Pour pouvoir parler de diffusion géographique, il faut pouvoir expliciter une structure et une dynamique. La structure contient la base d'invariance qui est composé normalement pour trois objets ; 1) les individués accueillants les virus (hôtes) caractérisés par un état définissant leurs rôle dans la diffusion, c'est-à-dire, 0 : non acquis, 1 : acquis. 2) le médiateur de l'interaction entre les hôtes (agents) et 3) le support de propagation des agents entre les hôtes (le canal).

La dynamique est décrite par un ensemble de règles définissant des processus d'évolution, comme règles d'acquisition (qui formalise l'entrée des agents dans les hôtes), d'émission (qui concerne la manière dont les agents sortent des hôtes) et de propagation (qui calcule la distribution des agents sortant des hôtes vers d'autres hôtes).

Comme exemples des phénomènes de diffusion géographique on a :

- La *diffusion d'un nuage toxique*, possédant le plus souvent une source localisée unique, le volume de produit se disperse dans l'espace jusqu'à arriver à un seuil de densité au-dessous duquel il n'est plus sensible. En termes concrets, l'hôte, évidemment, c'est l'espace, les états possibles de la diffusion sont sains et infecté. Le processus d'acquisition concerne ici

l'espace qui peut être pollué ou non par ce nuage. Il faut définir (par exemple) quelle est la densité de produit dans l'atmosphère à partir de laquelle chaque lieu est considéré comme pollué par le produit. De même, en chaque lieu et à chaque instant, il faut définir comment le produit se dissipe dans les lieux voisins en fonction de la densité du produit restant, de la vitesse du vent, etc. c'est-à-dire, la règle d'émission.

- Un *incendie de forêt*. Les hôtes sont les arbres et les agents sont les flammes (ou la chaleur) qui progressent d'arbre en arbre. Un arbre ne communique le feu que pendant un temps assez court et sur une ligne de front plus ou moins complexe. Le processus d'acquisition, c'est-à-dire, le passage de l'état 0 « sain » à l'état 1 « brûlé » dépend de son essence, son état de sécheresse, la chaleur ambiante transmise par les autres arbres en flamme, etc. Le processus de propagation du vecteur « feu » est fonction de la distance entre les arbres et de la direction du vent entre autres facteurs.
- Mais la plupart du temps, et particulièrement dans un contexte social ou humain, le processus de propagation est mal connu et sa dynamique difficile à formaliser, c'est le cas de la *diffusion d'une épidémie*. Dans ce cas, on définit plutôt la propagation (ici la contagion) de manière probabiliste, en définissant la probabilité qu'une personne infectée communique l'agent infectieux à une personne saine, lors d'un contact personnel. Cette probabilité dépend du cycle de développement de la maladie, c'est-à-dire du cycle d'activité des agents. Contrairement au nuage toxique, la quantité d'agents infectieux n'est pas conservative, dans un premier temps, elle se reproduit activement, donc s'accroît et envahit de plus en plus l'hôte, pour décroître ensuite et disparaître ou rester endémique.

Après avoir donné quelques exemples des phénomènes de diffusion, on va définir de manière plus générale le modèle qui va permettre de modéliser mathématiquement ces différents exemples dans un même cadre théorique.

Chaque processus se modélise dans le cadre d'un automate cellulaire (AC) ou d'un système multi-agents (SMA), par une règle (représentée par un rectangle) qui est applicable dans chaque agent (ou cellule). Cette règle code informatiquement la fonction qui transforme certaines données (les entrées de la règle, représentées par les flèches entrant sur le côté gauche du rectangle) en d'autres données (les sorties de la règle, représentées par les flèches sortant sur le côté droit du rectangle). La règle dépend aussi de facteurs environnementaux (contrôles, entrant sur le côté supérieur du rectangle). Dans la suite, on peut regarder le modèle de la règle d'acquisition, dans autres termes, l'état futur de la cellule, par exemple dans un incendie, la cellule est l'arbre qui est en train de prendre feu (0 il ne brûle pas, 1 il brûle).

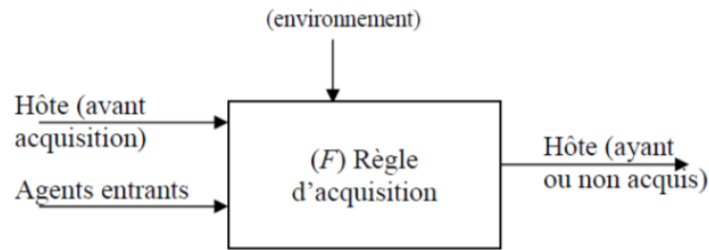


Figure 1. Règle d'acquisition

À gauche on regarde les entrées servant à modifier l'état de la cellule, donc, dans ce cas, l'état actuel ou non brûlé ($s(i, t) = 0$) et le nombre d'agents entrants, les arbres qui brûlent autour de notre arbre en question. La sorti, à droite, c'est le fait que l'arbre va brûler, donc un changement d'état ($s(i, t + 1) = 1$).

Dans la variable environnement, on peut additionner des détails comme direction et magnitude du vent, la vitesse de combustion du bois entre autres facteurs.

Ces états n'ont pas un statut symétrique, car le processus est irréversible. Tout hôte peut passer de l'état 0 à l'état 1 mais pas le contraire. De même, dans le modèle SIR (susceptible, contagieux, guéris), on a les transitions $S \rightarrow I \rightarrow R$, mais pas les transitions inverses.

Après avoir présenté le concept général de diffusion et sa formalisation à travers un modèle générique, il faut préciser maintenant les modèles globaux de croissance les plus courants.

2.1 Modèle de croissance

Les modèles de croissance sont parmi les modèles les plus utilisés en géographie [Saint-Julien T. 1985], [Dauphiné A. 2003]. On peut les classer en deux groupes, les modèles de croissance soit dans un contexte de ressource infinie, soit dans un contexte de ressource limitée et, dans ce dernier cas, il faut remarquer qu'il existe deux modèles mathématiques distincts : la **suite logistique** (temps discret) et la **fonction logistique** (temps continu). Le modèle logistique a souvent servi à caractériser les modèles de diffusion en géographie, même s'il est par construction indépendant de l'espace.

2.1.1. Modèle de croissance à source infinie.

Utilisant la métaphore épidémique, appelons $u(t)$ le nombre d'individus (hôtes) infectés à l'instant t dans une population. Lorsque la ressource est inépuisable ou très grande devant la valeur de $u(t)$, le taux de croissance r est supposé constant et la variation de u ne dépend que du nombre d'individus déjà infectés. Dans ce cas, le nombre de nouveaux malades à chaque pas de temps est proportionnel au nombre d'infectés déjà présents. Ce qui donne une relation de la forme :

$$u(t + 1) = u(t) + r * u(t) \quad (1)$$

La résolution de cette équation ne dépend que de l'état initial (u_0) et du taux de croissance r :

$$u(t) = u_0(1 + r)^t \quad (2)$$

Dans le cas d'un temps continu, cela s'exprime par une équation différentielle,

$$\frac{du}{dt} = \alpha \cdot u$$

dont la solution est une fonction exponentielle :

$$u(t) = e^{\alpha \cdot t + \beta} \quad (3)$$

En posant $u_0 = e^\beta$ et $r = e^\alpha - 1$, on retrouve exactement la formulation (2). Le modèle discret est compatible avec le modèle continu.

2.1.2. Modèle de croissance à source limitée.

Utilisons encore la métaphore de l'épidémie pour construire le modèle de croissance lorsque *la ressource est limitée*, ce qui est en général plus réaliste. On se donne une population de taille constante u_{max} . Dans cette population, il y a un nombre $u(t)$ d'individus infectés à l'instant t et u_0 à l'instant initial. En appelant r le taux d'interaction entre les individus, on obtient ainsi le modèle itératif en temps discret suivant, appelée ici suite logistique :

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ u(t+1) &= u(t) + r * u(t)(u_{max} - u(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

Celui-ci permet de calculer la valeur de u à un instant donné à partir de sa valeur à l'instant précédent. Les valeurs de la suite dépendent de la valeur initiale u_0 qui donne le nombre de personnes infectées à l'instant initial. Remarquons que si u_0 est nulle, la suite reste identiquement nulle. Elle ne pourra « décoller » qu'avec une valeur positive de u_0 , aussi petite soit-elle.

Lorsque $u_0 > 0$ et que le taux r est suffisamment petit, la croissance de la suite se traduit par une courbe en S. Elle augmente avec le temps jusqu'à devenir maximale lorsque la moitié de la population est infectée, puis la croissance se ralentit ensuite, $u(t)$ ne pouvant atteindre u_{max} .

On peut utiliser une formulation équivalente de ce modèle, en considérant non plus le nombre d'individus infectés mais la proportion $w(t) = u(t)/u_{max}$ d'individus infectés dans la population. Il suffit pour cela de diviser les deux membres de l'équation (4) par u_{max} . Apparaît alors le produit $r \cdot u_{max}$ que l'on nomme coefficient d'interaction s ,

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 = u_0 / u_{max} \\ s &= r \cdot u_{max} \\ w(t+1) &= w(t) + s \cdot w(t) \cdot (1 - w(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

Si l'on veut construire un modèle avec un pas plus fin, défini par un réel positif Δt , on peut écrire l'équation (4) de manière un peu plus générale

$$u(0) = u_0$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + r * u(t)(u_{max} - u(t))\Delta t \quad (6)$$

Dans le cas d'un temps continu, à partir de (6), on déduit la variation de la fonction $u(t)$ pour un pas de temps Δt :

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = r * u(t)(u_{max} - u(t))$$

Lorsque Δt devient infiniment petit, ce rapport est la dérivée de $u(t)$, notée du/dt , on obtient ainsi, l'équation différentielle logistique :

$$\frac{du}{dt} = \alpha * u(u_{max} - u) \quad (7)$$

où α est le taux de croissance instantané. Cette équation possède une solution exacte, appelée ici *fonction logistique*.

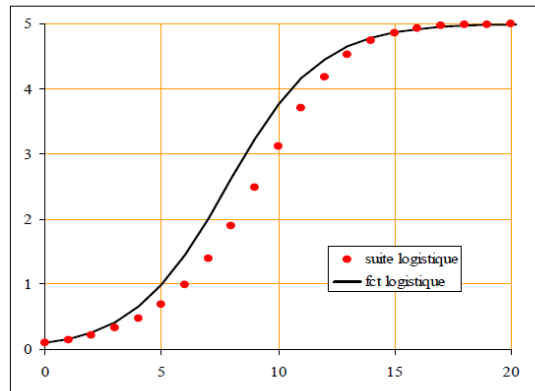


Figure 2. Courbe en S

Figure 1

Elle est donnée par l'une ou l'autre des expressions:

$$u(t) = \frac{u_{max}}{1 + C * e^{(-\alpha * u_{max} * t)}} \quad (8)$$

$$u(t) = \frac{u_{max}}{1 + e^{(-\alpha * u_{max} * t + \beta)}} \quad (9)$$

où les constantes C et β dépendent de la condition initiale $u_0 = u(0)$ qui ne doit pas être nulle, et LN représente le logarithme népérien: $C = \frac{u_{max} - u_0}{u_0}$ et $\beta = LN(C)$.

Les différences entre suite logistique (4) et fonction logistique (8), sont de trois ordres :

- La première est évidente: la suite logistique est à temps discrète alors que la fonction logistique est à temps continue.

- La deuxième porte sur le caractère explicite ou non de la fonction: dans la suite logistique, la fonction $u(t)$ n'est pas connue explicitement, elle n'est calculable que de manière itérative. Il faut avoir calculé tous les termes de la suite pour pouvoir calculer $u(t)$. Ce n'est pas le cas de la fonction logistique puisqu'on dispose d'une formule directe pour calculer $u(t)$ en fonction de toute valeur réelle de t .

- La dernière différence est la plus importante : à partir de la même valeur initiale u_0 , les deux modèles ne coïncident ensuite en aucun de leur point, même avec le même taux de croissance. La fonction logistique définie en (8) n'est jamais une solution exacte de $u(t)$ vérifiant la formule (4) ou (5).

Nous avons vu que la suite logistique telle que décrite en (5) modélise l'évolution en temps discret d'une grandeur $w(t)$ associée à une population limitée. Remarquons que cette suite logistique devient chaotique lorsque les circonstances sortent des conditions normales de modélisation (population non limitée par exemple). Il est donc nécessaire de bien maîtriser les conditions d'évolutions de la suite afin d'éviter de la rendre chaotique et donc non utilisable.

La première condition de réalisme est que le nombre de malades ne puisse jamais dépasser la population totale. Ainsi, quel que soit t , $w(t)$ ne doit jamais dépasser 1. Cette condition se traduit, à partir de (5) par l'inégalité

$$(s + 1)w(t) - s.w(t)^2 < 1$$

En étudiant le signe du trinôme : $sw^2 - (s+1).w + 1$, on montre alors qu'il faut que $s \leq 1$, ce qui impose la *condition de stabilité* suivante sur r :

$$w(t) < 1 \rightarrow r < 1/u_{max} \quad (13)$$

Après avoir déterminé les conditions non-chaotiques du modèle, on fera une explication selon le type de modèle, c'est-à-dire, les modèles qui sont logistiques déterministes ou probabilistes, les modèles de diffusion par front, modèles de croissance-diffusion et finalement les modèles spatio-temporelles.

2.2 Modèle logistique déterministe ou probabiliste

Le phénomène étudié (épidémie, etc.) peut se calculer au niveau macroscopique de manière déterministe, le taux d'interaction r de la suite logistique (4) représente alors la proportion des liens potentiels qui se traduisent par une infection. Mais le modèle peut se concevoir au niveau des individus, microscopique, le coefficient r représente alors la probabilité pour qu'un contact potentiel entre individu sain et individu infecté se traduise par une contamination de l'individu sain.

2.2.1 Simulation spatialisée du modèle logistique discret

Imaginons que l'espace soit partitionné en N cellules carrées, chaque individu occupant une cellule, on a donc $N = u_{max}$. Chaque individu i peut être dans deux états $s_i = 0$ (sain) ou $s_i = 1$ (infecté). On définit u_0 cellules infectées à l'instant initial, les autres ($u_{max} - u_0$) étant saines.

Le principe de croissance logistique se traduit alors de la manière suivante. La probabilité pour qu'une cellule i soit saine est :

$$P(s_i = 0) = \frac{u_{max} - u(t)}{u_{max}}$$

La probabilité pour qu'un individu soit infecté à l'instant t sachant qu'il est sain, vaut donc :

$$P\left(s_i = 1 / s_i = 0\right) = \frac{k \cdot u(t)}{u_{max} - 1}$$

Où k est la proportion des contacts transmettant l'infection.

La probabilité qu'une cellule i soit infectée à l'instant t est donc donnée par une loi logistique :

$$P(s_i = 1) = \frac{k \cdot u(t)}{u_{max} - 1} \frac{u_{max} - u(t)}{u_{max}} = r \cdot u(t)(u_{max} - u(t)) \quad (14)$$

avec $r = \frac{k}{u_{max}(u_{max} - 1)}$

L'algorithme s'exprime alors comme suit. Pour toute cellule i entre 1 et N , si i est sain ($s_i = 0$), on fait un tirage aléatoire uniforme d'un nombre entier n entre 1 et $N-1$. Si $n \leq r \cdot u(t)u_{max}$ alors la cellule i devient infectée ($s_i = 1$) sinon elle reste saine. Remarquons qu'on aurait pu aussi tirer au hasard les individus sains, pour que le processus soit entièrement aléatoire. La figure qui suit montre une séquence de diffusion de ce type simulée et proposée par Daudé et Langlois, portant sur un domaine de $101 \times 101 = 10201$ cellules, dans lequel on a 497 cellules infectées au départ (soit 4,87%).

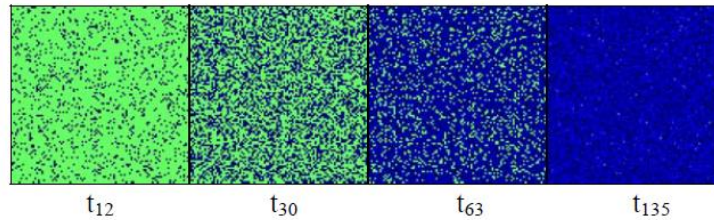


Figure 3. Simulation. Modèle logistique discret.

On peut dire que ce modèle n'est pas un modèle de diffusion spatiale dans la mesure où il ne tient pas compte de l'espace. Ici tout individu peut entrer en contact avec tout autre, sans considération de localisation. L'objectif des sections qui suivent est de spatialiser les modèles de croissance que nous venons d'explorer. Trois modèles sont ainsi présentés : un modèle de diffusion par front,

un modèle de croissance-diffusion et un modèle générique, apte à rendre compte d'une grande variété de phénomène de propagation.

2.3 Modèle de diffusion par front

A l'inverse du modèle précédent, on examine maintenant un modèle dont la croissance dépend des interactions entre individus voisins. C'est le modèle de diffusion par front.

2.3.1 Modèle théorique du front circulaire

On se place dans un espace continu à deux dimensions et nous utilisons ici la métaphore de l'incendie de forêt. Si le foyer démarre en un point C , (ou formant un petit cercle de rayon R_0 autour de C) dans un espace homogène et sans vent, la propagation s'effectue alors au voisinage immédiat des flammes dans les parties non brûlées. Le front se propage à une vitesse constante v autour du centre C , la partie brûlée (points i où $s_i = 1$) a donc la forme d'un cercle de rayon $R(t)$ qui s'agrandit avec une vitesse v constante, on a donc $R(t) = vt + R_0$ et la surface brûlée $S(t)$ à l'instant t est donc la surface du cercle de rayon $R(t)$:

$$S(t) = \pi * R(t)^2 = \pi v^2 t^2 + 2\pi v R_0 t + \pi R_0^2$$

Ce modèle de croissance n'est donc pas du tout de type logistique. De manière plus générale *la croissance est ici proportionnelle à la longueur $L(t)$ du front*, elle vérifie donc une équation du type:

$$\frac{du}{dt} = kL(t)$$

Comme cette longueur est, pour un cercle (ou même un carré), proportionnelle au rayon $R(t)$, la solution $u(t)$ de cette équation donne toujours un modèle de croissance quadratique en fonction du temps. Evidemment lorsque l'incendie atteint les limites du domaine, cette croissance se ralentit pour s'arrêter lorsque tout est brûlé, donnant ainsi une courbe de croissance en forme de S, mais qui n'a plus rien à voir, mathématiquement, avec la fonction logistique.

La simulation déterministe de la diffusion par front décrit ainsi la propagation d'agents par contact direct entre hôtes, à l'instar d'un incendie. La règle d'acquisition est déterministe : tout hôte i passe de l'état 0 à l'état 1 si au moins un de ses 4 voisins est à l'état 1. La figure qui suit montre une séquence de la simulation à partir d'une configuration initiale où les hôtes situés au centre du domaine sont à l'état 1.

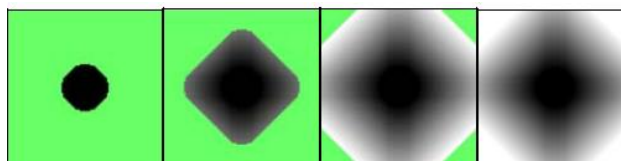


Figure 4. Simulation. Modèle par front.

La réalité est évidemment beaucoup plus complexe. Dans le modèle sans vent, l'hétérogénéité locale a pour effet de donner une forme complexe à la ligne de front, qui s'écarte du centre avec le temps. La croissance de la surface brûlée est alors plus forte dans les parties convexes du front et plus lente dans les parties concaves. Néanmoins, le front faisant un tour complet autour du centre de départ de l'incendie, la somme des convexités l'emporte sur les concavités de la valeur d'un cercle, si bien que la surface brûlée évolue selon un modèle très proche du front circulaire théorique.

2.4 Modèle de croissance-diffusion

Les deux modèles précédents sont tous deux des modèles de croissance, aussi la notion de diffusion reste sous-jacente. Or la diffusion pure ne présuppose pas une croissance de l'ensemble de départ. L'exemple du produit volatile qui s'échappe d'une cuve (stock limité) pour se répandre dans l'atmosphère est un exemple typique de diffusion sans croissance. Le volume initial de produit se conserve dans le temps mais occupe un domaine de plus en plus vaste en se diluant, jusqu'à ce que la dilution soit telle qu'il devienne indétectable, ou, si le domaine est petit (comme une pièce fermée), le produit tend à s'homogénéiser dans l'espace pour arriver à un état d'équilibre, d'équidensité.

2.4.1 Modèle continu de Croissance-Diffusion

Supposons donc un espace à deux dimensions (ou plus) représentant un milieu continu pouvant contenir un certain « produit » (cela peut être un effectif de chômeurs, la proportion de personnes infectées, le taux de NO_x dans l'atmosphère, etc.) dont la mesure dans le milieu est définie par une fonction $z=u(x,y,t)$, qui dépend du lieu (x,y) et de l'instant t . On suppose la fonction u continue et on considère la surface représentant les valeurs de la fonction u sur l'axe des z .

Le modèle de diffusion dans ce milieu continu est formalisé le plus souvent par un modèle de croissance-diffusion. Il y a donc deux membres dans l'équation, le membre de gauche exprime la variation dans le temps de la fonction u , c'est la dérivée partielle par rapport au temps. Le deuxième membre mesure la concavité locale de la surface des $z=u(x,y,t)$, c'est l'opérateur de Laplace (ou le laplacien) de u qu'on note :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ainsi l'équation de diffusion obtenue, appelée aussi équation de la chaleur, s'exprime par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \quad (17)$$

Si, de plus, il y a croissance de u , il faut ajouter dans le membre de droite un terme de croissance, par exemple logistique comme en (5), ce qui donne l'équation finale

de croissance-diffusion, appelée aussi réaction-diffusion car elle a été initialement étudiée en chimie par Turing [TUR 52], où une réaction provoque l'augmentation locale de densité d'un produit dans le milieu, qui diffuse ensuite dans son voisinage. L'équation s'écrit donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + \alpha \cdot u(1 - u) \quad (18)$$

2.4.2 Modèle discret de Croissance-Diffusion

Dans un espace discret comme un réseau cellulaire à n_v voisins ($n_v = 4$ pour le voisinage dit de von Neumann, $n_v = 8$ pour le voisinage de Moore, ou plus si le rayon du voisinage est supérieur à 1), le Laplacien peut se définir comme la différence entre la valeur centrale de u et la moyenne de ses voisins :

$$\Delta u(i, j, t) = \langle u(i, j, r) \rangle_v - u(i, j, t)$$

Où la moyenne de u pour les voisins de (i, j) est définie par la suite :

$$\langle u(i, j, r) \rangle_v = \frac{1}{n_v} \sum_{(\varepsilon, n) \in V} u(i + \varepsilon, j + n, t)$$

Le modèle de croissance non local se traduit alors par :

$$u(i, j, t + 1) = r \cdot \langle u(i, j, r) \rangle_v + (1 - r \cdot \langle u(i, j, r) \rangle_v) u(i, j, t) \quad (20)$$

Sous sa forme probabiliste, on a pour toute cellule (i, j) saine :

$$P \left(u(i, j, t) = 1 / u(i, j, t) = 0 \right) = r \cdot \langle u(i, j, r) \rangle_v$$

Qui exprime que la probabilité de transition de l'état 0 vers l'état 1 est proportionnelle à la moyenne des voisins infectés.

L'objectif est maintenant de proposer un modèle générique capable de couvrir tous les cas intermédiaires, entre le modèle logistique (voisinage global) et le modèle par front (voisinage local), basé sur un voisinage de taille donnée et une certaine profondeur temporelle.

2.5 Modèle Spatio-temporel de diffusion

On est souvent amené à restreindre les contacts possibles d'un adoptant potentiel, non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps. Il arrive en effet fréquemment que les ayant adoptés ne restent qu'un certain temps enthousiastes à communiquer leur adoption, de même, dans une épidémie, un individu infecté ne reste contagieux qu'un certain temps, etc.

Dans ce cas, on va voir une grande semblance avec la formule antérieure, mais avec le voisinage spatio-temporel ($V \times T$).

La moyenne du voisinage est définie comme :

$$\langle u(i, j, r) \rangle_{v_{xT}} = \frac{1}{n_v} \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{(\varepsilon, n) \in V} u(i + \varepsilon, j + n, t - \tau) \quad (23)$$

Et, c'est changement nous amène para une même formulation qu'en 20 mais avec la nouvelle moyenne.

$$u(i, j, t + 1) = r. \langle u(i, j, r) \rangle_{v_{xT}} + (1 - r. \langle u(i, j, r) \rangle_{v_{xT}}) u(i, j, t)$$

Tout se passe alors comme si chaque agent, une fois transmis à un hôte, avait une durée de vie limitée à T itérations. Passé à l'état 1, l'hôte ne reste donc actif que pendant les T itérations suivantes. Ceci nécessite que chaque hôte possède non seulement une connaissance de son voisinage, mais aussi de son passé à travers une fonction qui donne l'âge de sa transition à l'état 1. Tant que l'hôte est dans l'état 0, la valeur de cette fonction ($v(i, j)$) n'est pas définie lorsque son état passe à 1, la fonction prend la valeur 0, et sa valeur s'incrémente ensuite de 1 à chaque pas de temps. Dès que la valeur atteint le seuil T , l'hôte devient inactif.

La transition à l'état 1 d'un hôte i dépend de la proportion d'hôtes actifs dans son voisinage spatio-temporel, qui est la moyenne de v dans ce voisinage.

La figure qui suit montre des dynamiques différenciées de diffusion selon la durée de vie T des agents.

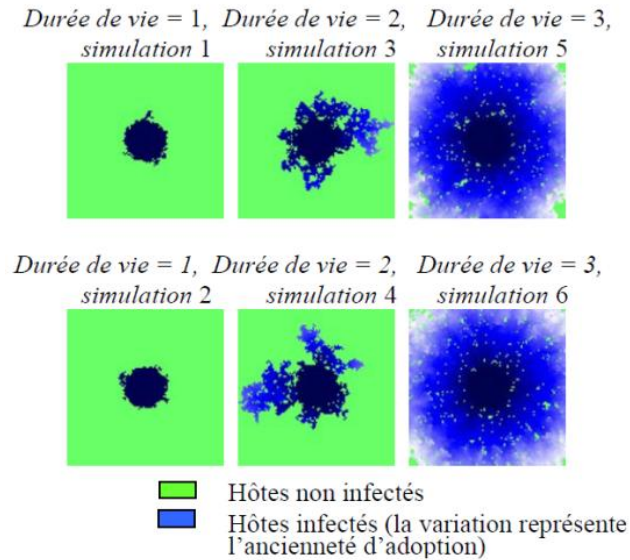


Figure 5. Simulation. Modèle SxT.

On constate que la règle d'émission a ici une forte incidence sur l'évolution de la diffusion. Une faible durée de vie de l'agent entraîne un arrêt rapide de la diffusion, bien avant la saturation du domaine (simulations 1 et 2). Au contraire, lorsque la durée de vie de l'agent est importante le modèle privilégie la règle d'acquisition et a un comportement proche d'un modèle stochastique de diffusion par front (simulations 5 et 6). C'est dans des niveaux paramétriques intermédiaires que le modèle produit ses formes les plus intéressantes, à l'instar des simulations 3 et 4. Dans ce cas les règles d'acquisition et d'émission sont pleinement en interactions, la forme finale dépend en partie de la direction initiale prise par le front.

3. BENCHMARKING

Pour le benchmarking, j'ai réalisé des diagrammes de flux et certaines simulations permettant de comparer les résultats obtenus avec l'article de Daudé et Langlois.

3.1 Modèle logistique discret

Diagramme de flux

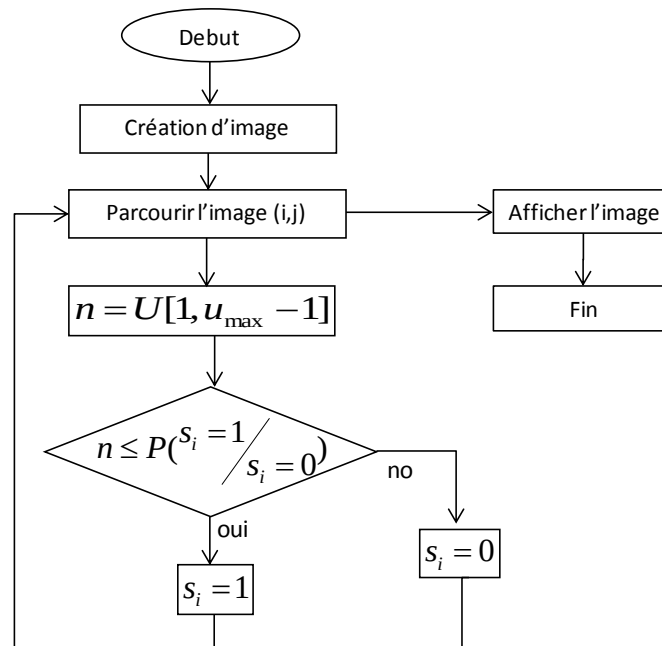


Figure 6. Diagramme de flux. Modèle logistique discret.

D'abord, on crée l'image à partir d'une loi de probabilité uniforme, où on remplit l'image avec des cellules d'états infectées d'une manière aléatoire. Dans notre cas, on prend une image de dimension 100x100 et la valeur initiale (u_0) est entre 390 et 395 cellules, il change à cause de la nature aléatoire de la variable.

En suite, on parcourt l'image à l'aide des boucles « for » avec le but d'évaluer l'état futur de chaque cellule à partir de la probabilité conditionnelle et une fonction probabiliste de loi uniforme qui varie entre 1 et $n_{\max} - 1$.

À la fin, quand l'image est parcourue dans son intégralité, on l'affiche.

Simulations

Comme décrit précédemment, une initialisation du phénomène de diffusion est mise en place au moyen d'une loi de probabilité normale.

Le code utilisé est :

```
s = zeros(N,N,N); %Variable d'états (x,y,iteration)
for i=1:N
    for k=1:4
        j = floor(random('unif',1,N)); %Rempli de maniere aleatoire l'image
        s(i,j,1)=1; %Changement d'état
    end
end
```

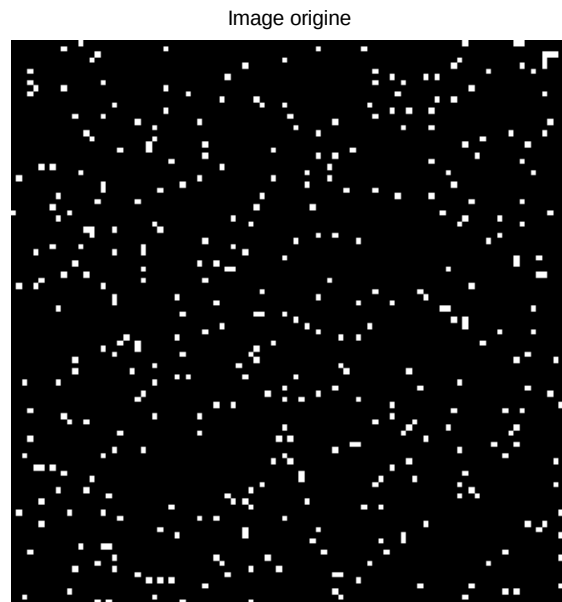


Figure 7. Image d'origine. Modèle logistique discret.

En noire, on identifie l'état 0 ou sain de la cellule et en blanc, l'état infecté. Par la suite, on regarde les résultats obtenus après plusieurs itérations du processus de diffusion.

Le code suivant permet d'avoir les résultats :

```
r=.5e-5; %k/(umax*(umax-1)); %r minimum=1e-5
u(t+1)=u(t)+r*u(t)*(umax-u(t)); %modele discrete
s(:,:,t+1)=s(:,:,t); % preparation de l'image avec l'info precedent
%parcourir l'image
for i=1:N
    for j=1:N
        if s(i,j,t) == 0; % on demande s'il est sain
            n = floor(random('unif',1,umax-1));
            if n<=(r*u(t+1)*umax) % probabilite de s=1 sachant s=0
                s(i,j,t+1)=1;
            end
        end
    end
end
end
```

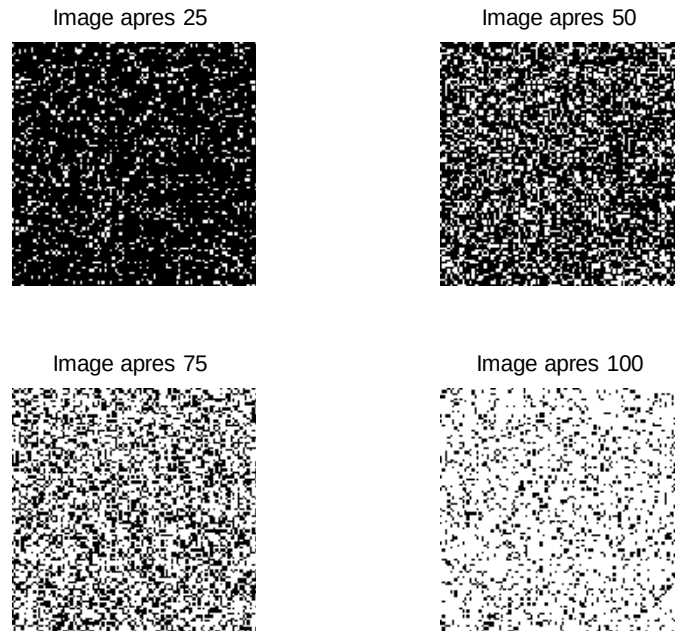


Figure 8. Simulation. Modèle logistique discret. 25, 50, 75, 100 itérations.

On peut bien vérifier le phénomène de diffusion aléatoire du modèle et comment avec le temps, l'infection se propage à l'ensemble des hôtes.

Dans la suite, on trouvera la courbe en S du modèle qui permet de voir le comportement attendu par le modèle en accord avec l'article de référence.

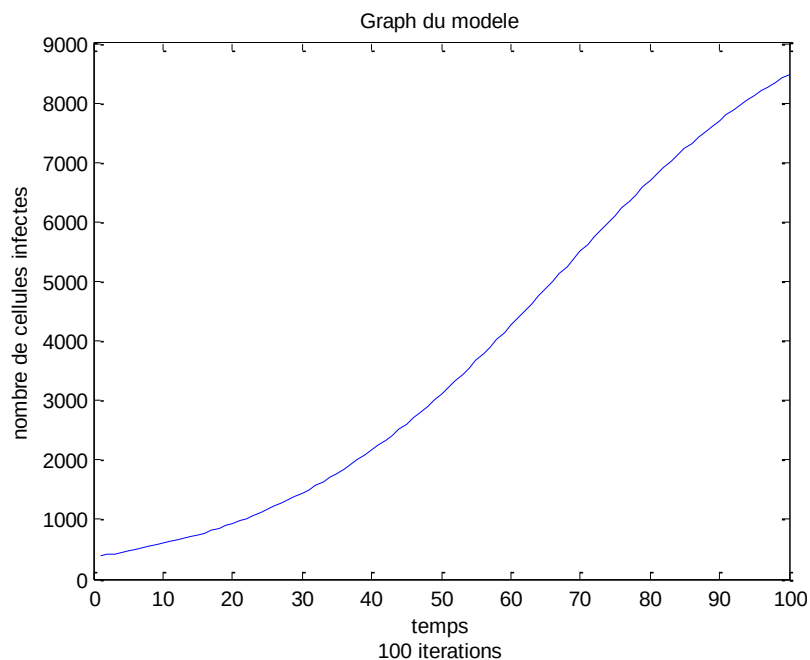


Figure 9. Courbe. Modèle de diffusion logistique.

3.2 Modèle de diffusion par front

Diagramme de flux

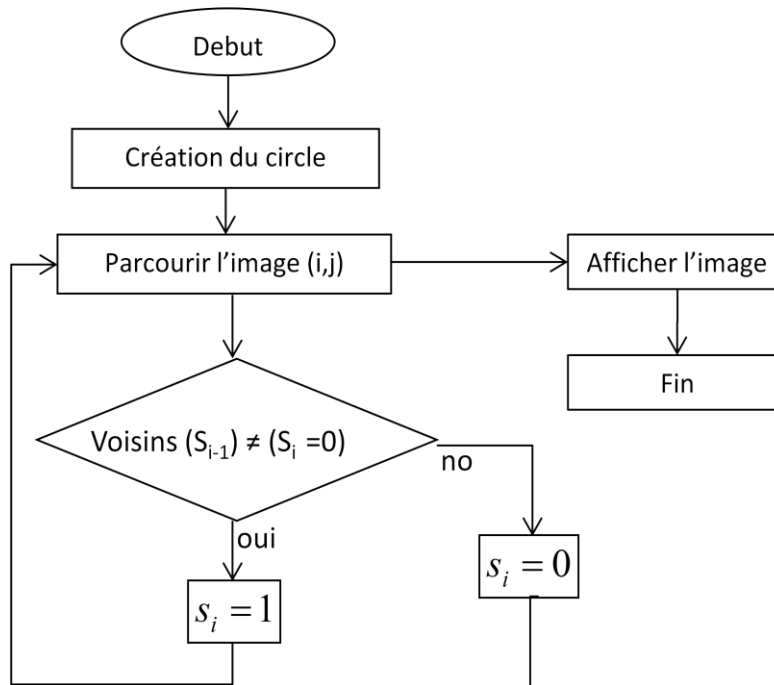


Figure 10. Diagramme de flux. Modèle par front.

D'abord, comme dans le modèle antérieur, on crée l'image à partir d'un cercle de rayon 5.5 au centre de l'image. Dans ce cas, on prend encore une image de dimension 100x100 et la valeur initiale (u_0) est 97 cellules.

En suite, on parcourt l'image à l'aide des boucles « for » avec le but d'évaluer l'état futur de la cellule qui dépend, fondamentalement de voisinage du pixel. Si au moins un des quatre voisins est infecté, la cellule change d'état.

Une fois l'ensemble des hôtes potentiels parcourus, on affiche l'image.

Simulations

Comme on l'avait décrit précédemment, en utilisant la courbe du cercle on remplit l'image.

Le code utilisé est :

```
r(1)=5.5; % Rayon initial
for i=2:N-1
    for j=2:N-1
        if (N/2-i)^2+(N/2-j)^2<=r(1)^2 %Creation de circle
            S(i,j,1)=1; %Changement d'etat
        end
    end
end
end
```

Le résultat obtenu est:

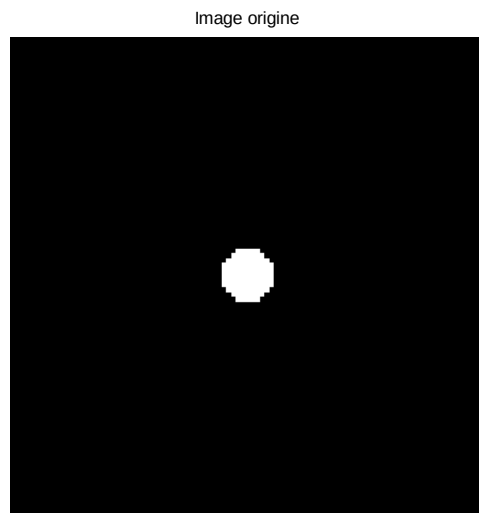


Figure 11. Image d'origine. Cercle.

Comme dans l'image antérieure, en noir, on regarde l'état 0 ou sain de la cellule et en blanc l'état infecté. Le processus de diffusion est alors mis en œuvre au moyen du code suivant :

```
v=0.78; x=0; y=0; %%Vitesse du brulage et magnitude du vent en X et Y
a=pi*v^2; b=2*pi*v*r(1); c=pi*r(1)^2;
for t=1:100
    [sen]=vitesse(x,y); %Il sert a choisir le voisinage a utiliser
    s(t)=a*t^2+b*t+c; %Surface brulee selon modele
    r(t)=v*t+r(1); %Rayon
    S(:,:,t+1)=imdilate(S(:,:,t),sen)+S(:,:,t); % Etat
    % A cause de la fonction imdilate il faut eliminer des divergences avec
    % une boucle et une fonction IF
    for i=1:N
        for j=1:N
            if abs(S(i,j,t))== Inf
                S(i,j,t)=0;
            elseif S(i,j,t)>=1
                S(i,j,t)=1;
            end
        end
    end
end
```

```

end
sf(t)=sum(sum(S(:, :, t), 2)); % Surface brule selon figure
end

```

Donc, on obtient les images qui suivent.

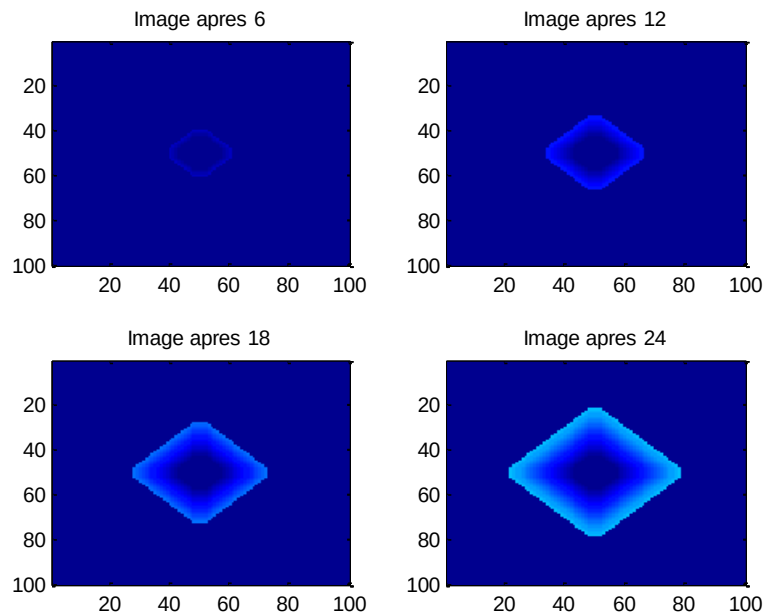


Figure 12. Simulation. Modèle par front. 6, 12, 18, 24 itérations.

On regarde comment le front se propage à travers l'espace d'une manière uniforme, bien que l'image n'est pas un cercle, la somme des convexités l'emporte sur les concavités de la valeur d'un cercle, conclusion faite par Langlois et Daudé. La variation des couleurs permettent d'observer le changement toute au long de la simulation et en particulier « l'âge » d'un hôte infecté.

À la fin, le résultat après 30 itérations est :

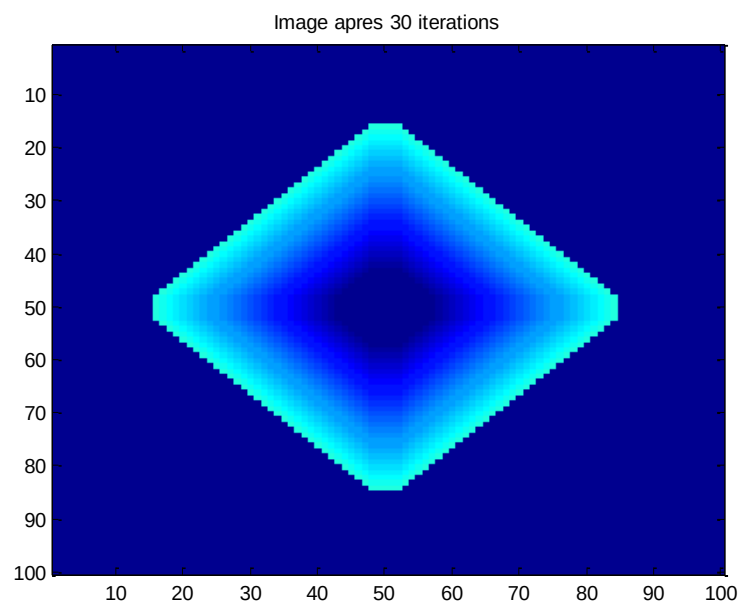


Figure 13. Simulation. Modèle par front. 30 itérations.

Quand on regarde le graph des modèles des cellules infectées, on observe deux comportements. Le premier où on observe la surface selon le modèle a un comportement exponentiel à cause de l'expression dans la section 3.2.1, et le deuxième où la surface selon l'image a un comportement d'une courbe en S en raison de la quantité finie des hôtes à infecter et de l'exclusion du décompte des pixels à l'intérieur du cercle. Ce qui cause une diminution dans la vitesse de propagation dont ce comportement.

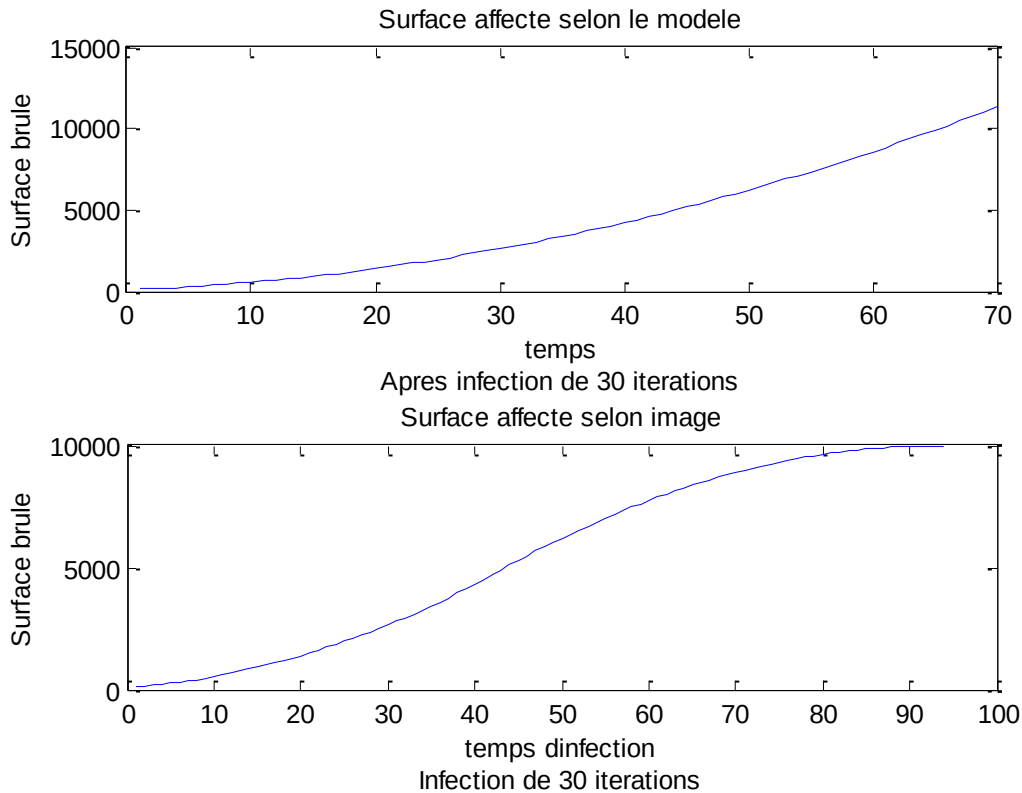


Figure 14. Comparaison. Surface affectée selon modèle et selon l'image.

3.3 Modèle spatio-temporel

Diagramme de flux

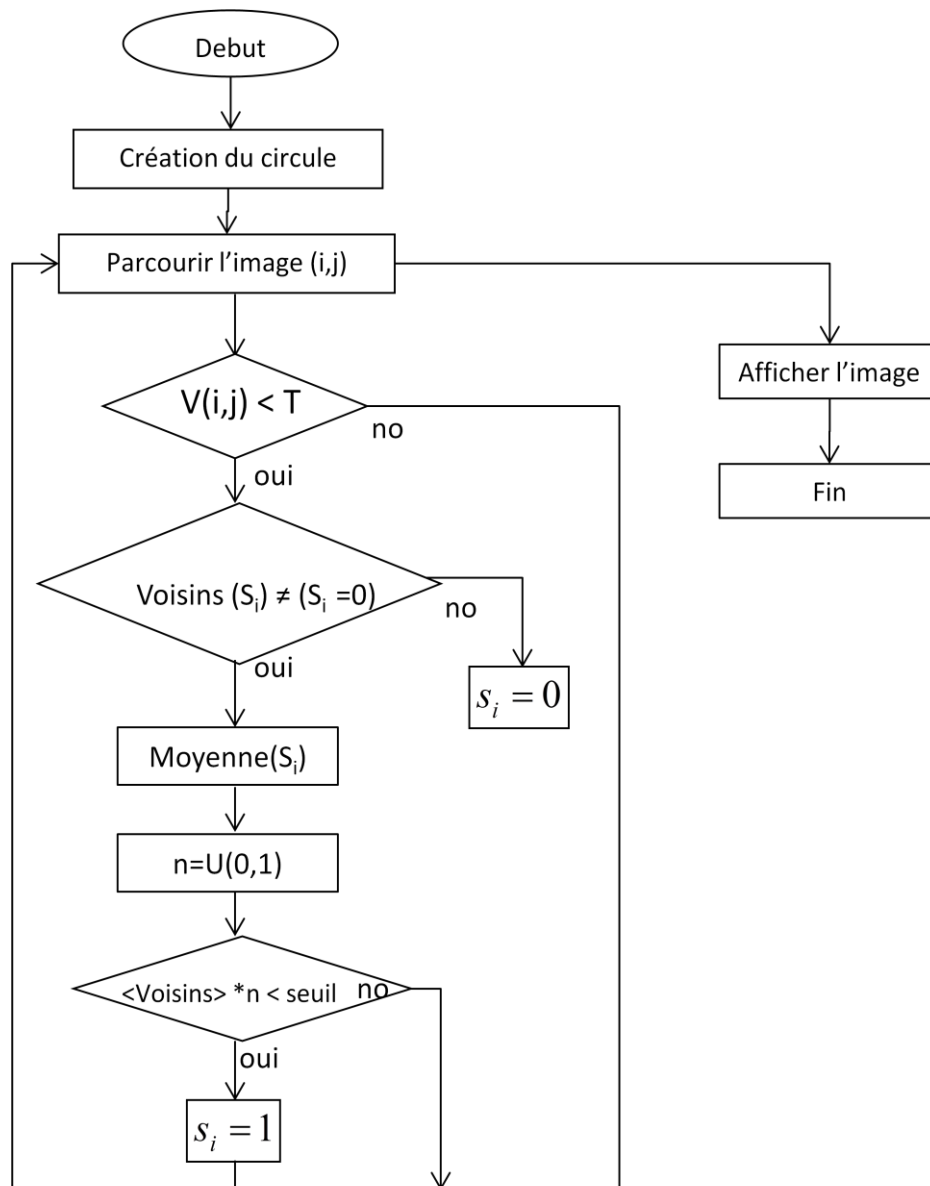


Figure 15. Diagramme de flux. Modèle SxT.

D'abord, comme dans le modèle antérieur, on crée l'image à partir d'un cercle de rayon 5.5 centré sur l'image de dimension 100x100. La valeur initiale (u_0) est 97 cellules.

En suite, on parcourt l'image à l'aide des boucles « for » dans le but d'évaluer l'état futur de la cellule qui, dans ce cas, dépend de deux facteurs : Premièrement qu'au moins un des quatre (ou huit) voisins soit infecté et deuxièmement qu'un facteur probabiliste (n) dépendant de la moyenne des états des voisins autorise la propagation.

Simulations

Comme décrit précédemment, la Figure 16 illustre l'initialisation du processus de diffusion.

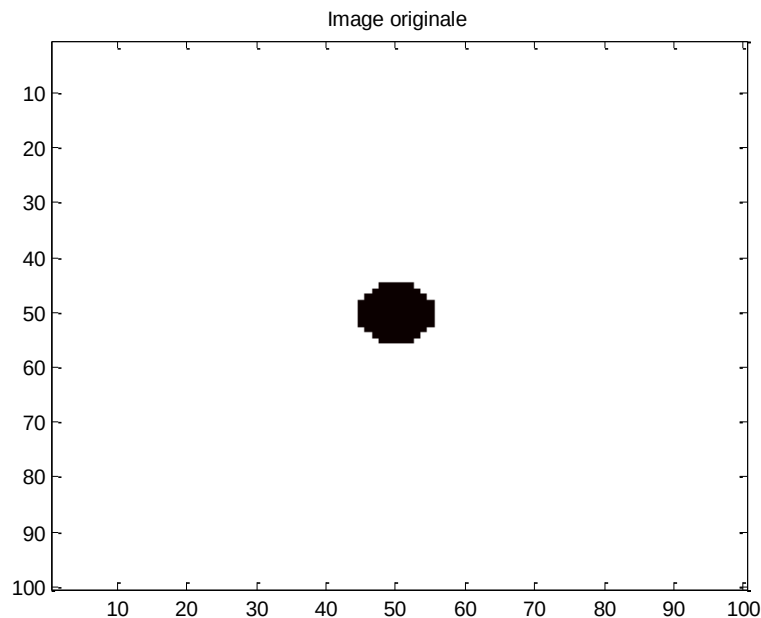


Figure 16. Image d'origine. Cercle.

À la différence des cas précédents, en noir, on regarde l'état 1 ou infecté de la cellule et en blanc l'état non-infecté. Par la suite, on regarde les résultats obtenus au cours de plusieurs itérations.

Le code est divisé en trois parties.

Une première partie est en charge de valider le voisinage selon l'âge d'infection de la cellule, c'est-à-dire, si le temps d'infection de la cellule est inférieur au temps maximum de durée de vie de l'hôte, l'état est maintenu à 1, sinon il change. La variable $v(i,j,t)$ donne l'information de la durée de vie du virus (par exemple) dans la cellule (l'hôte donc), c'est-à-dire, l'âge de la cellule. Cette variable est incrémentée elle s'incrémente à chaque pas de temps (itération) du processus.

```
K1=K1+t*sensi; %Variable d'affichage (couleur)
D(:,:,t+1)=D(:,:,t); %Preparation de l'image futur (affichage)
for i=2:N-1
    for j=2:N-1
        for p=-1:1
            for q=-1:1
                if v(i+p,j+q,t)>=T %Duree de vie attendue T=10
                    S(i+p,j+q,t)=0;
                    a(i,j)=1; %Paramètre dinfectabilité (0 il est, 1 il a
deja été infecte)
                end
            end
        end
    end
end
```


Dans la suite, on analyse le voisinage et on décide si la propagation est possible ou non. On réalise ce calcul à l'aide, bien sûr, de la moyenne des voisins et d'une fonction probabiliste de loi uniforme $U[0,1]$. Si la valeur est 0, il n'est pas possible de propager le virus sinon il peut y avoir propagation.

```
[moy]=valide(S(i-1:i+1,j-1:j+1,t)); %Moyenne du voisinage et effet
probabiliste
media(i,j,t)=moy;
-----
function [moy]=valide(C)
%Moyenne du voisinage
my=mean2(C);
%Seuil de decision
if my >= 0.2; %Minimum un voisin infecte
    mo=1;
else
    mo=0;
end
%Fonction probabiliste
moy = mo*floor(random('unif',0,2));
-----
```

Finalement, on utilise la valeur de la moyenne et selon l'état de la cellule et s'il a déjà été infecté ou non (variable $a(i,j)$) on diffuse le virus.

```
if S(i,j,t)==0
    if a(i,j)==0
        if media(i,j,t) ==1
            S(i,j,t+1)=1; %Changement d'etat a cause de la diffusion
            D(i,j,t+1)=K1; % Variable d'affichage
            v(i,j,t+1)=v(i,j,t)+1; %Variable qui incremente a chaque
pas d'infection
        else
            S(i,j,t+1)=0;
        end
    else
        S(i,j,t+1)=S(i,j,t);
    end
else
    S(i,j,t+1)=1;
    v(i,j,t+1)=v(i,j,t)+1;
end
u(i,j,t+1)= r*media(i,j,t) + (1-r)*media(i,j,t) *u(i,j,t); %Modele
logistique discrete
end
end
```

Les résultats d'une simulation comportant 30 itérations avec une durée de vie de 10 itérations pour chaque hôte infecté est présentée Fig. 17 et 18:

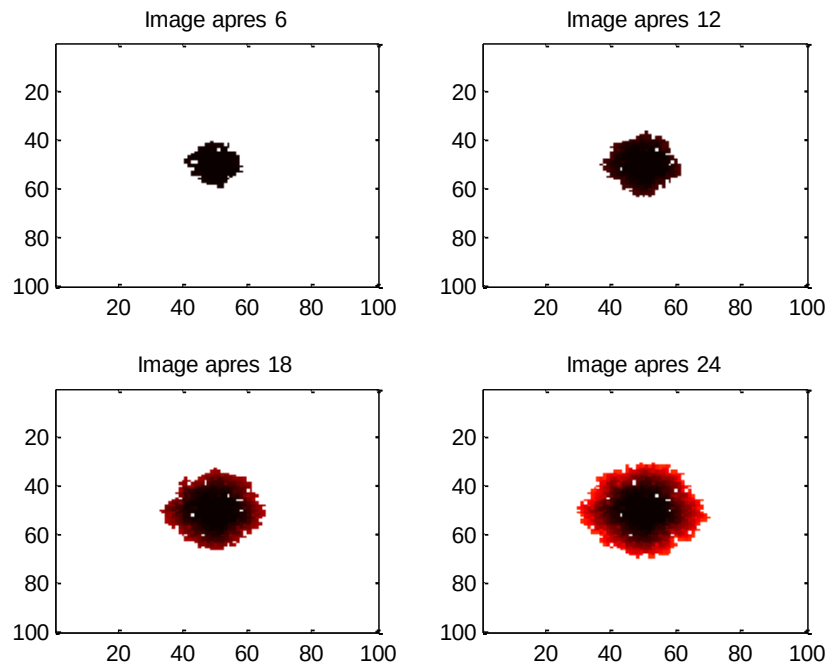


Figure 17. Simulation. Modèle SxT. 6, 12, 18, 24 itérations.

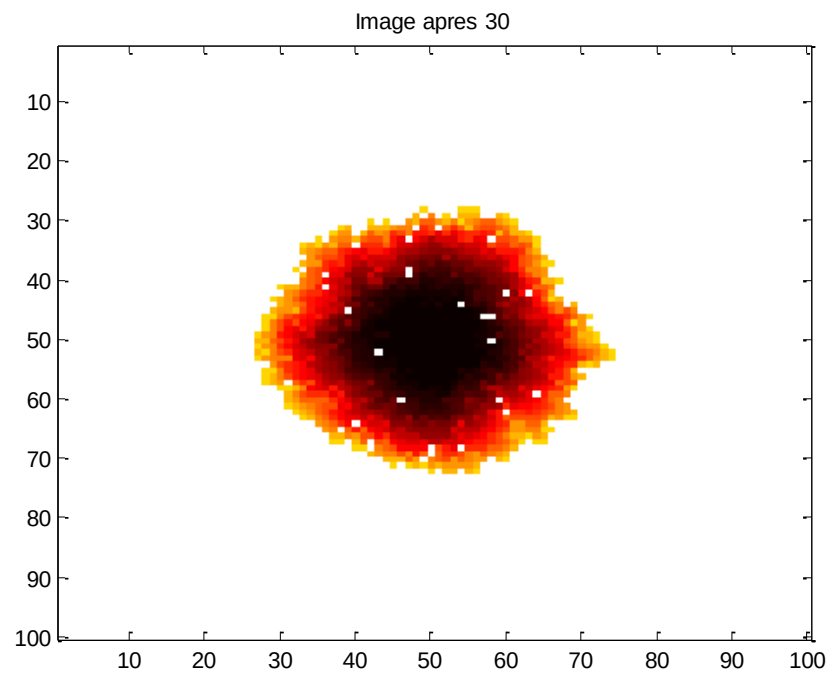


Figure 18. Simulation. Modèle SxT. 30 itérations.

4. Enrichissement des modèles

Au niveau du modèle logistique discret déterministe, de par la simplicité du modèle avant tout illustratif, nous ne proposons pas d'enrichissement particuliers. Par contre, pour le modèle de diffusion par front, nous proposons d'ajouter des paramètres extérieurs comme la direction et la force du vent qui peuvent par exemple très largement influencer la propagation d'un feu de forêt. Au niveau du modèle spatio-temporel, nous proposons d'enrichir le modèle présenté précédemment par l'intégration d'une forme d'anisotropie dans le processus de diffusion spatial en nous inspirant des méthodes de restauration d'images du même type (diffusive donc), l'idée générale étant de pouvoir prendre en compte dans le modèle les contraintes du milieu de diffusion (les rues favoriseront l'écoulement de l'eau lors d'une inondation par exemple, une pathologie touchant un végétal aura tendance à suivre le réseau de nervures lors de sa diffusion etc.). Par ailleurs, la question de la possibilité de « réinfection » est aussi abordée.

4.1 Modèle de diffusion par front

Pour simuler les conditions du vent, on va utiliser la fonction de dilatation dans un voisinage qui va permettre de choisir la direction dans laquelle on voudrait simuler le vent, donc propager l'infection. Le résultat de cette implémentation est :

Diagrammes de flux

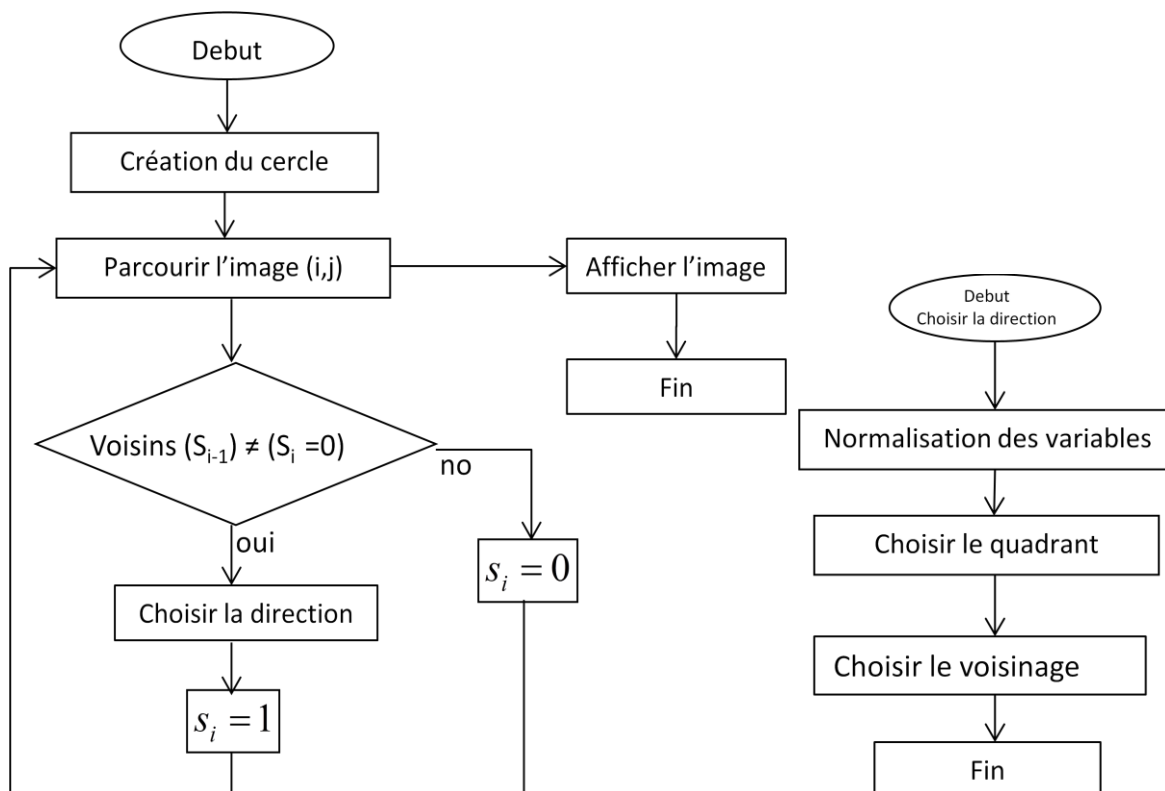


Figure 19. Diagramme de flux. Extension diffusion par front. Direction

Le diagramme est presque le même que le précédent correspondant à ce modèle, avec l'unique différence du bloc « Choisir la direction » qui permettra de ajouter le paramètre du vent au modèle.

Algorithme

Le code qui permettre de choisir la direction de propagation est :

```
function [sen]=vitesse(X,Y)
    %Normalisation des variables
    if X~=0
        x=X/abs(X);
    else
        x=X;
    end
    if Y~=0
        y=Y/abs(Y);
    else
        y=Y;
    end
    direction=[7,4,1;8,5,2;9,6,3]; %permet de choisir le quadrant d'action
    v=direction(x+2,y+2);
    switch v
        case 1 % x=-1 y=1
            vois=[1,1,0;1,0,0;0,0,0];
        case 2 % x=0 y=1
            vois=[1,1,1;0,0,0;0,0,0];
        case 3 % x=1 y=1
            vois=[0,1,1;0,0,1;0,0,0];
        case 4 % x=-1 y=0
            vois=[1,0,0;1,0,0;1,0,0];
        case 5 % x=0 y=0
            vois=[0,1,0;1,0,1;0,1,0];
        case 6 % x=1 y=0
            vois=[0,0,1;0,0,1;0,0,1];
        case 7 % x=-1 y=-1
            vois=[0,0,0;1,0,0;1,1,0];
        case 8 % x=0 y=-1
            vois=[0,0,0;0,0,0;1,1,1];
        case 9 % x=1 y=-1
            vois=[0,0,0;0,0,1;0,1,1];
    end
    sen=vois;
end
```

D'abord, on normalise les entrées car on s'intéresse à la direction et non à la magnitude en ce qui concerne ce modèle. On se sert ensuite d'eux pour choisir le quadrant d'action. Une fois choisit le quadrant, on utilise la fonction Switch pour définir le voisinage, par exemple, dans le cas où $x=-1$ et $y=1$, le voisinage est :

```
1  1  0
1  0  0
0  0  0
```

Le résultat est :

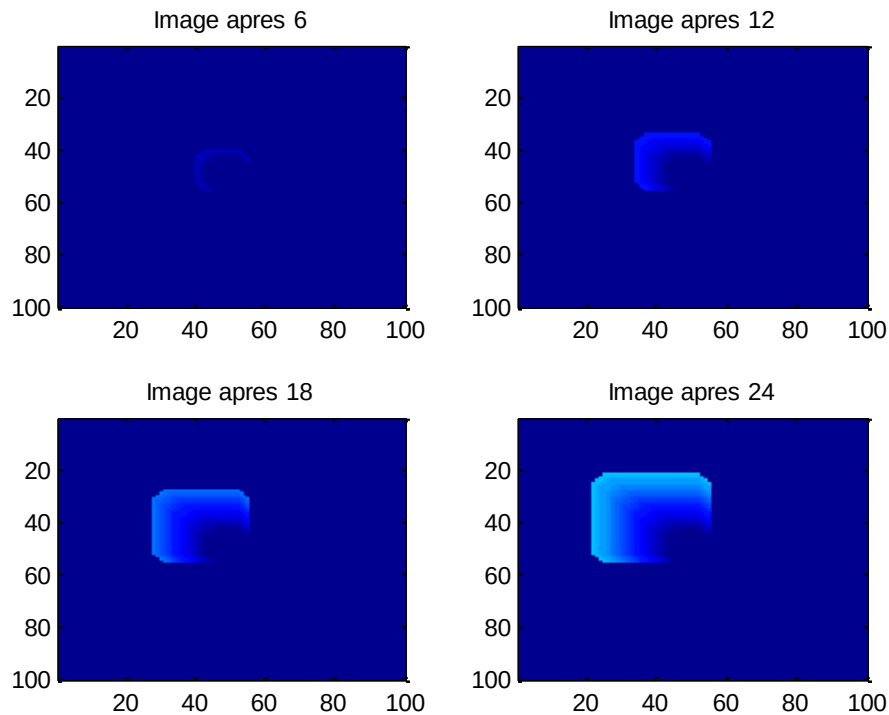


Figure 20. Simulation. Modèle par front. Direction $x=-1; y=1$. 6, 12, 18, 24 itérations.

On regarde comment le vent infecte la propagation et maintenant on diffuse dans une seule direction.

Un autre paramètre que nous avons ajouté à ce modèle est la possibilité qu'un brandon (dans le cas d'un feu de forêt par exemple) saute en dehors du champ principal de propagation donnant lieu à un nouveau foyer d'incendie. Dans cette simulation en direction prioritairement horizontale pour le « saut », on peut regarder la génération des nouveaux petits incendies au tour du champ d'action toujours en respectant le sens du vent.

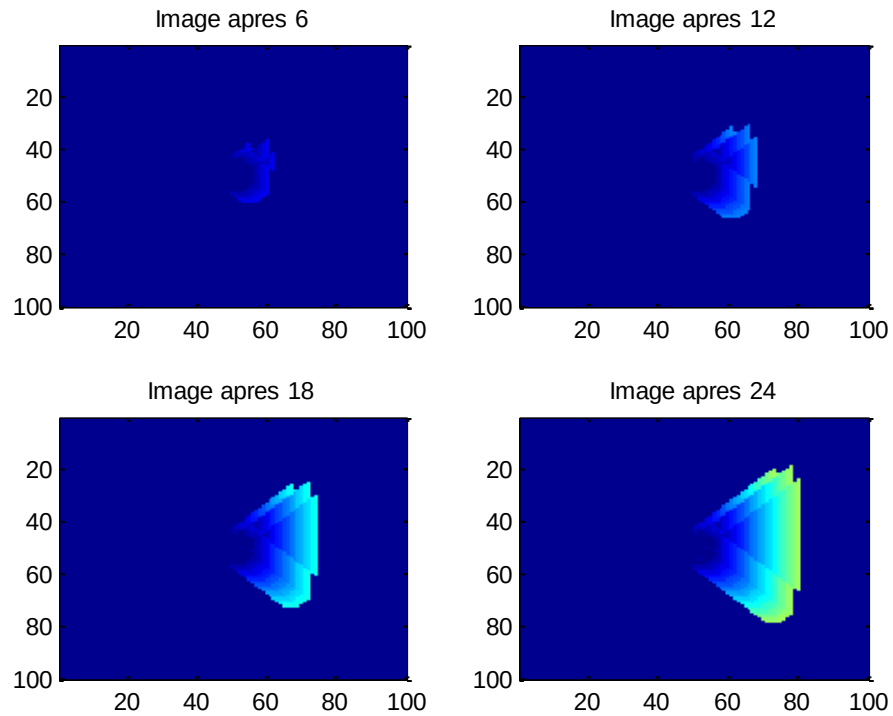


Figure 21. Simulation. Modèle par front. Direction $x=1;y=0$. 6, 12, 18, 24 itérations.

Dans la première image, après 6 itérations, on peut bien regarder la création de 3 nouveaux foyers d'incendie et dans la suite, comment ils évoluent et se diffusent dans l'espace jusqu'à obtenir ce résultat :

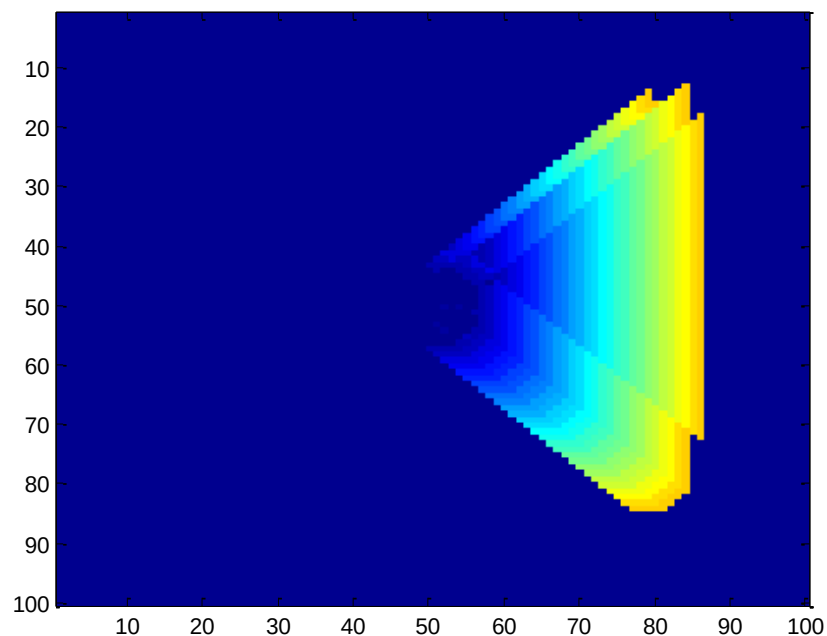


Figure 22. Simulation. Modèle par front. Direction $x=1;y=0$. 30 itérations.

4.2 Modèle de diffusion spatio-temporel

L'enrichissement principal de ce type de modèle consiste en l'intégration d'un facteur d'anisotropie dans la diffusion au niveau du terme spatial (la Laplacien donc) pour l'instant parfaitement isotropique. Le principal avantage de l'intégration d'un facteur d'anisotropie est de pouvoir prendre en compte des contraintes spatiales extérieurs comme la structure des rues d'une ville en cas d'inondation, la densité et la nature des arbres lors d'un incendie, autant de facteurs qui vont influencer la diffusion du phénomène étudié.

Le diagramme de flux général propose est alors le suivant :

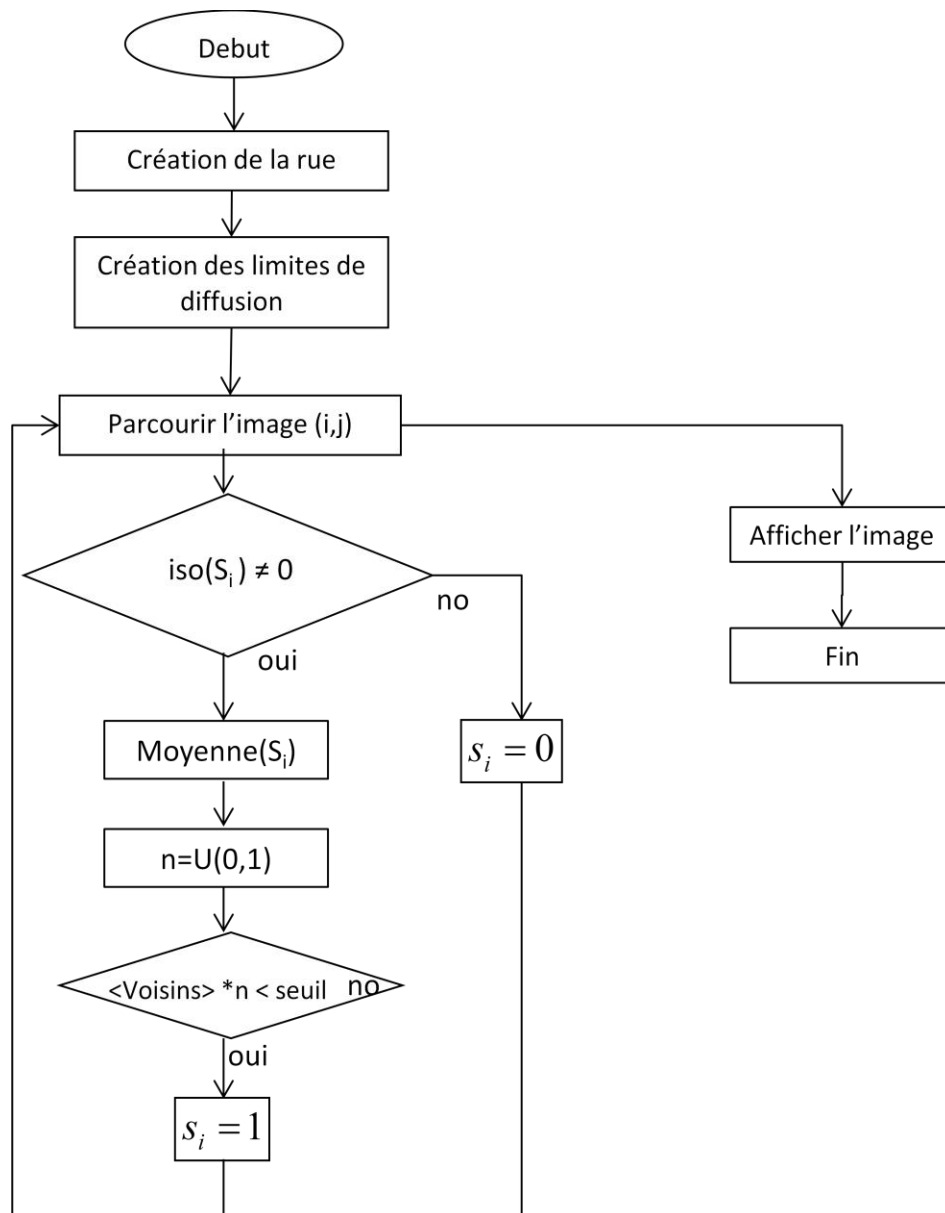


Figure 23. Diagramme de flux. Modèle SxT.

Le diagramme est similaire au diagramme du modèle SxT, sauf pour l'ajout d'une variable qui permette la propagation ou non, (variable iso).

Nous allons expliquer cet enrichissement en se basant en deux modèles. Le premier est la simulation du comportement d'un incendie dans une image où nous avons désigné une rue au milieu de l'image; dans ce cas, on utilise une fonction indicatrice binaire (variable iso), qui nous indique s'il y a ou non propagation. Le deuxième cas est la simulation de la propagation d'un virus sur les chemins d'une feuille, en partant de l'image de la feuille (simulée), et dans ce cas, on aura besoin de définir une fonction indicatrice en s'inspirant des modèles de diffusion utilisés en restauration d'images, et de type Perona-Malik¹ par exemple.

Algorithme

Premier exemple.

D'abord on initialise une rue avec des hôtes en état « infecté » pour l'affichage et avec la nouvelle variable appelée iso indiquant s'il est ou non infectable.

```
%initialisation "autoroute"
for i=45:55
    S(:,i,:)=1;
    D(:,i,:)=1;
    a(:,i)=0;
    iso(:,i)=0;
end
```

En suite, le code est similaire à celui-ci au début du modèle spatial temporel, avec la différence de l'ajout de la condition de la variable d'empêchement à la propagation, iso.

```
for i=2:N-1
    for j=2:N-1
        for p=-1:1
            for q=-1:1
                if iso(i+p,j+q)==0 % Empêchement de la diffusion sur
l'autoroute
                    a(i,j)=1;
                end

                if v(i+p,j+q,t)>=T
                    S(i+p,j+q,t)=0;
                    a(i,j)=1;
                end
            end
        end
    end
end
```

¹ La formule de la diffusion anisotropique pour Perona-Malik est définie comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g \nabla u) = g \Delta u + \nabla g \cdot \nabla u$$

Où la variable g est une fonction positive, continue, non linéaire et décroissante qui nous servira comme détecteur de contour. Typiquement, la fonction g est soit la fonction de Lorentz ou soit la fonction de Leclerc. Dans notre cas on utilisera la fonction de Leclerc définie comme :

$$g(|\nabla u|) = \exp\left(-\frac{|\nabla u|^2}{K^2}\right)$$

Où K est une constante choisie manuellement en fonction de l'image et nabla l'opérateur gradient.

Deuxième exemple.

Dans une autre simulation, on opte pour simuler la texture d'une feuille et la propagation d'une infection. Nous utilisons la technique de Perona-Malik pour l'obtention de la fonction indicatrice de contours qui permettra de contraindre la diffusion selon la géométrie de l'image.

```
im=imread('Chemin3.jpg'); %lecture de l'image
imgI=rgb2gray(im);        %passage au mode des grays
imgI=double(imgI);        %passage au mode double pour traitement
[rows, cols] = size(imgI);
maskSize = max([rows, cols]);
DoG = difference_of_gaussian_kernels(maskSize); %creation du gradient de
max dimension
Ix = conv2(imgI, DoG.Gx, 'same'); %Derivade partiel en X
Iy = conv2(imgI, DoG.Gy, 'same'); %Derivade partiel en Y
DD_mag = sqrt(Ix.^2 + Iy.^2);    %Magnitude du gradient
DD_mag = DD_mag./255;          % grayscale [0,255] --> [0,1]
g = exp(-DD_mag/100);          %Application matematic de Perona-Malik
cont1=not(im2bw(g, .9953));    %variable contenant les contours
```

Simulation

Premier exemple.

D'abord on fait une simulation simple d'une rue et la propagation d'un incendie, l'image originale est :

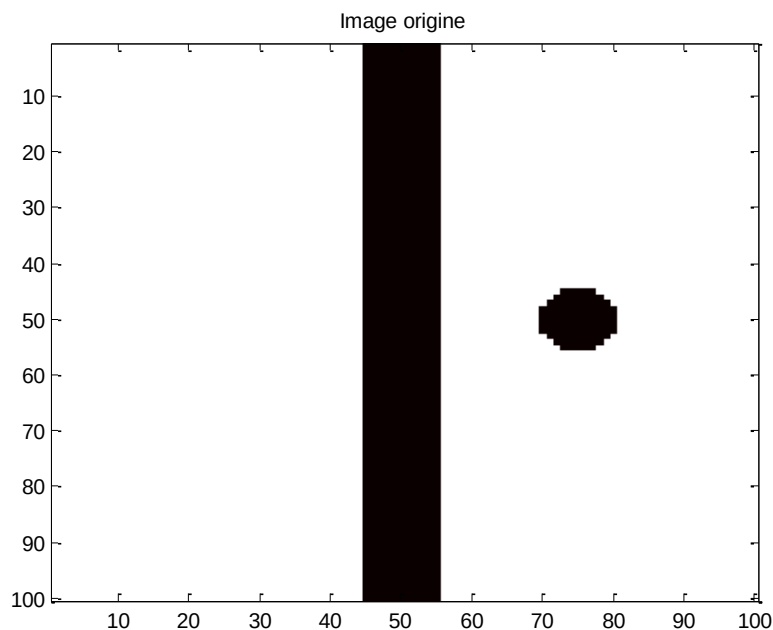


Figure 24. Image d'origine. Rue.

En noir au milieu de l'image, on trouve l'exemple d'une rue et à chaque côté on imagine la forêt, zone où l'incendie peut se propager.

Après une simulation de 30 itérations avec une durée de vie de 10, les résultats obtenus sont :

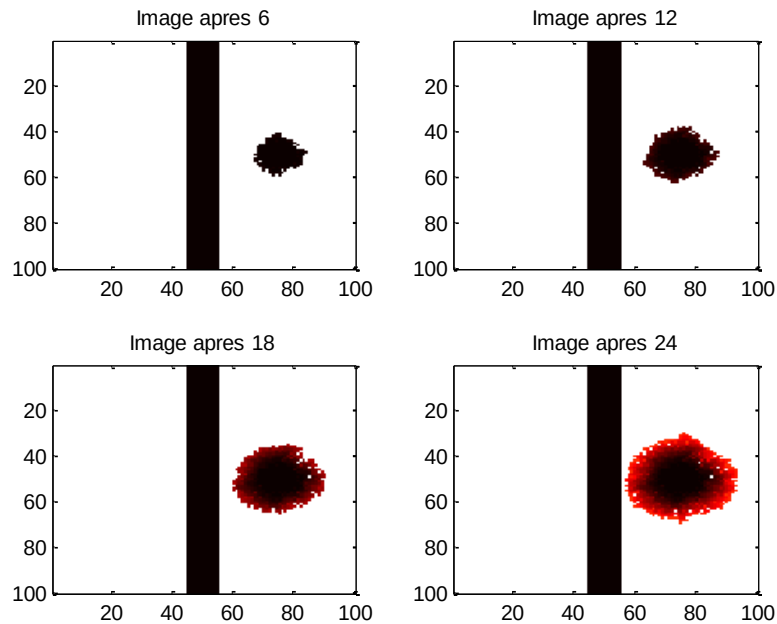


Figure 25. Simulation. Rue. 6, 12, 18, 24 itérations.

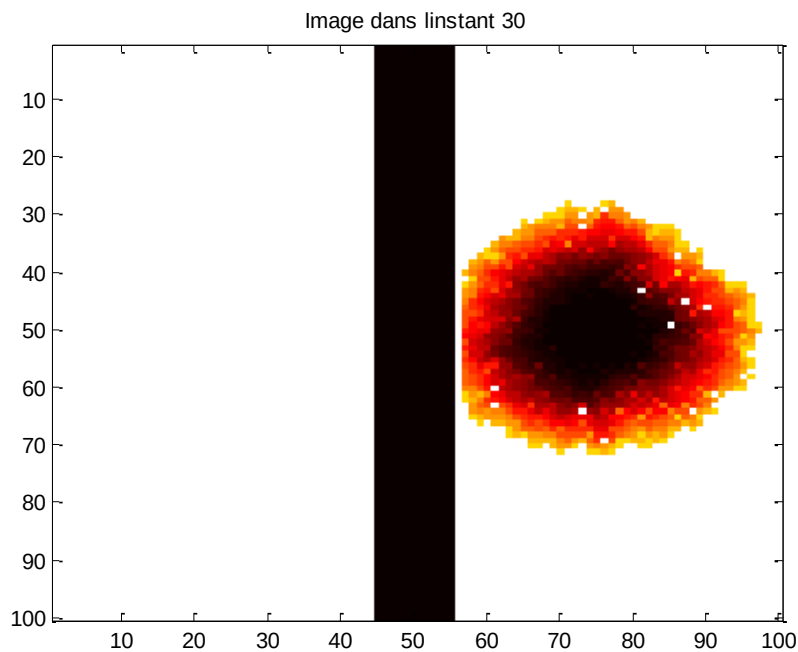


Figure 26. Simulation. Rue. 30 itérations.

On peut regarder comment l'incendie s'arrête au moment où il arrive à l'autoroute et la propagation est concentrée dans les autres directions.

Deuxième exemple.

L'image originale, c'est-à-dire la texture de la feuille et l'image contenant les contours (cont1) sont :

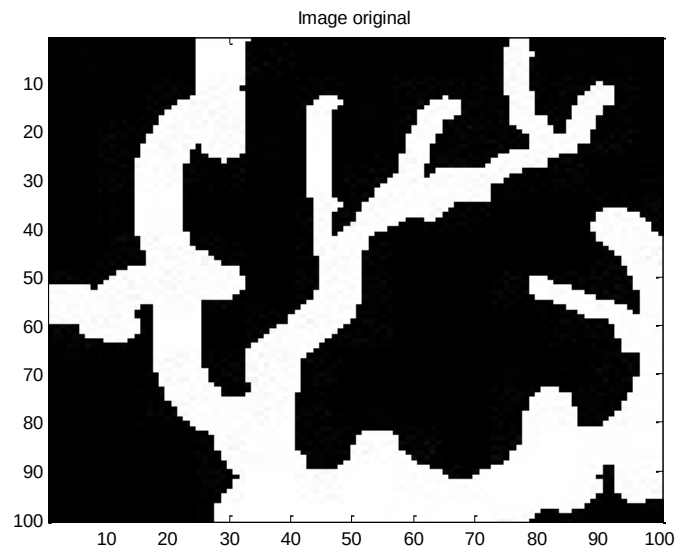


Figure 27. Image d'origine. Feuillage.

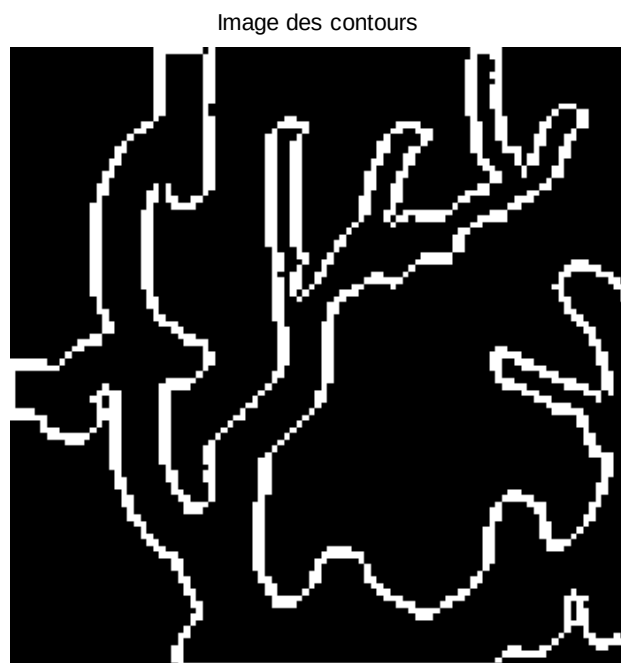


Figure 28. Image des contours obtenue au moyen de la fonction indicatrice de Perona-Malik.

Dans l'image des contours on identifie les limites de diffusion. Dans les Fig. 29 et 30, nous pourrions apprécier les différentes images après 40 itérations (l'incendie a eu lieu dans la position 95,45).

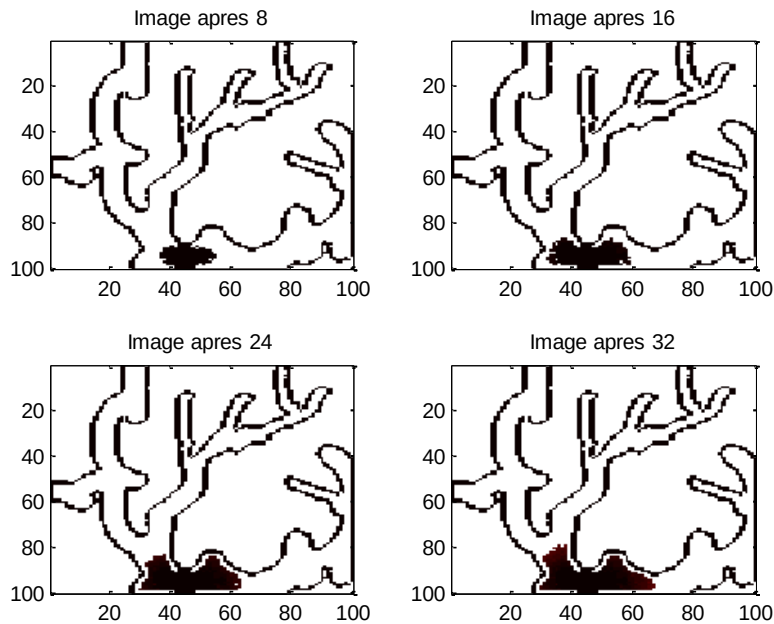


Figure 29. Simulation. Feuillage. 8, 16, 24, 32 itérations.

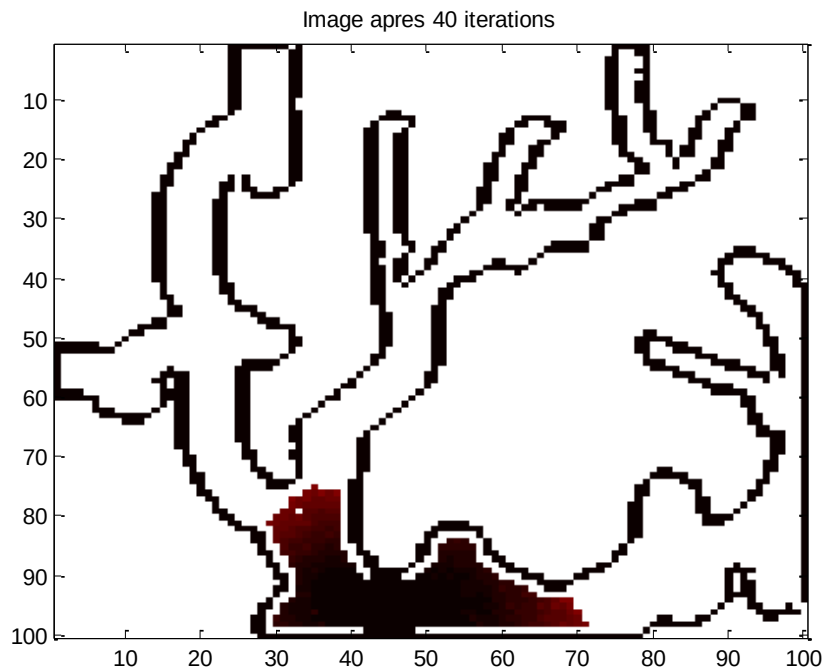


Figure 30. Simulation. Feuillage. 40 itérations.

On voit bien, comment l'infection suit le chemin que l'on avait désigné. Maintenant, dans le même exemple mais avec un temps de propagation plus longue, nous obtenons comme résultat :

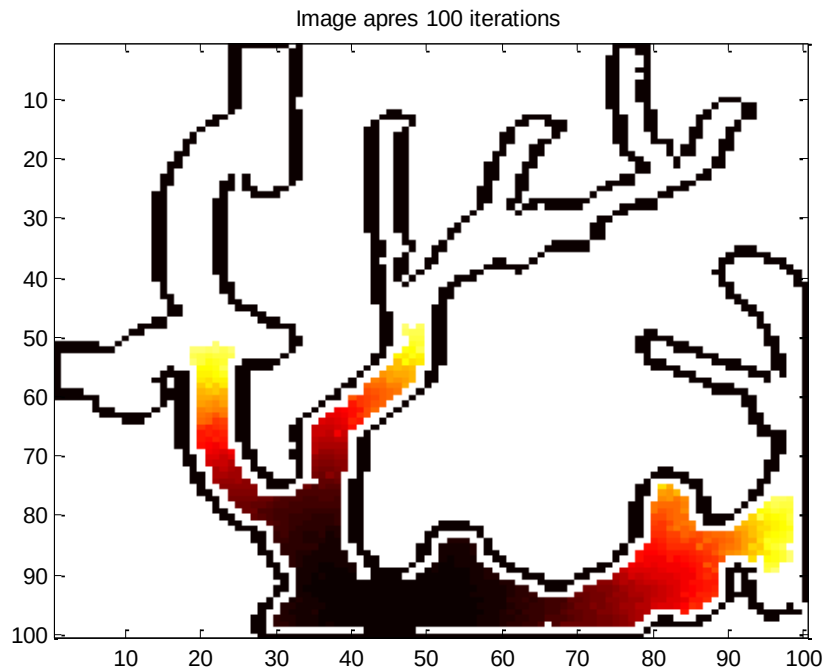


Figure 31. Simulation. Feuillage. 100 itérations.

On regarde bien, comment l'infection se propage tout le long du réseau infectable et il ne touche pas les régions qui ne peuvent être infectées, donc le cas des tissus lisses dans le cas de plants, ou des bâtiments, béton et revêtement dans le cas de la ville.

5. Conclusions et perspectives

Nous avons réalisé une mise en œuvre de l'article de Langlois et Daudé et on a proposé et validé certains tests qui ont permis d'enrichir les différents modèles et permis de mieux comprendre les concepts proposés dans l'article, c'est-à-dire, la combinaison des trois processus (l'acquisition, l'émission et la propagation) dans le milieu de la diffusion et les concepts d'hôtes et d'agents.

Parmi tous les modèles que nous avons étudiés, le plus intéressant grâce aux diverses applications et les différents tests que nous avons effectués est le modèle de diffusion spatio-temporel. Ce type de modèle permet comme nous l'avons vu d'intégrer des propriétés d'anisotropie dans le processus de diffusion et de ce fait d'intégrer des connaissances a priori sur le milieu diffusif étudié. Ce modèle est d'autant plus intéressant qu'il peut être enrichi par analogie avec les méthodes de restauration de type diffusif très largement utilisées en restauration d'image. Les premiers tests effectués avec la fonction indicatrice de Perona-Malik <Perona90> sont très encourageants et prometteurs. Il reste néanmoins maintenant à traiter des cas réels issus de l'imagerie satellitaire par exemple. Par ailleurs, d'autres modèles de diffusion anisotrope pourraient s'avérer intéressants comme l'intégration du tenseur local de structure comme facteur d'anisotropie local <Weicker95>.

6. Bibliographie

- Concepts et modélisation de la diffusion géographique. **Daudé et Langlois**. Cybergeog : Revue européenne de géographie, N° 364, 9 mars 2007.
- Structure Tensor. Tutorial and Demonstration of the uses of structure tensors using gradient representation. **Shawn Arseneau**. Robotics Institute, Carnegie Mellon University.
<http://www.cs.cmu.edu/~sarsen/structureTensorTutorial/>
(Consulté: 19 septembre 2011).
- Digital imaging processing and the relation between sampling theorie and partial differential equations. (*El procesamiento de imágenes digitales y su relación con la teoría de muestreo y las ecuaciones en derivadas parciales.*) **Leonardo Colombo**. Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid, Spain.
<http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2011/05/08/132810>
(Consulté: 19 septembre 2011).