Une approche informationnelle de la restauration d'images

Vincent Courboulay[1], Aymeric Histace[2], Michel Ménard[1] et Christine Ménard[2]

[1] L3i, Laboratoire Informatique Image Interaction,
Université de La Rochelle,
Pôle Sciences et Technologie, Av Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 1 - FRANCE.
Tél : int+ 33 5 46 45 83 21, Fax : int+ 33 5 46 45 82 42
vcourbou, mmenard@univ-lr.fr

[2] LISA, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (FRE 2656 CNRS),
Université d'Angers,
62, avenue Notre Dame du Lac - 49000 Angers - FRANCE.
Tél : int+ 33 2 41 22 65 00, Fax : int+ 33 2 41 22 65 61
aymeric.histace@univ-angers.fr

Résumé La détection et la reconnaissance d'objets dans une image sous-entendent un système de traitement de l'information. Les méthodes utilisées reposent très souvent sur des cadres théoriques bien établis (approches variationnelles, morphologie mathématique, approches statistiques ou probabilistes, approches géométriques, ...). L'objectif commun de ces méthodes est de s'attacher à restaurer, rehausser ou extraire une information présente dans l'image. En dépit de l'importance de la notion d'*information pertinente*, l'utilisation de la théorie de l'information est curieusement absente des méthodes de référence de traitement d'images. Nous présentons ici un formalisme de restauration d'images originale fondée sur une axiomatique empruntée à la physique, l'Information Physique Extrême. Nous identifions la restauration d'images à l'obtention d'un compromis incertitude imprécision. Ce compromis est alors géré par un paramètre t que nous identifions à un paramètre d'échelle. Enfin, nous proposons une EDP de restauration directement issue de ce formalisme où l'*a priori* se modélise par un quadri potentiel.

Mots clés : Restauration d'images, Théories de l'information, Approches variationnelles & EDP, Information physique extrême.

1 Introduction et motivations

La détection et la reconnaissance d'objets dans une image sous-entendent un système de traitement de l'information qui, dans sa généralité, vise à analyser un phénomène physique ou biologique, par conséquent dynamique, par le biais d'une chaîne de transformation. Ce monde est cependant toujours appréhendé au travers de capteurs imparfait. Très souvent, l'analyse de l'image commence donc par la résolution d'un problème inverse visant à retrouver l'image originale non perturbé par un bruit d'acquisition ou autre.
Dans cette optique, les approches utilisées reposent très souvent sur des cadres théoriques bien établis (approches variationnelles, morphologie mathématique, approches statistiques ou probabilistes, approches géométriques, ...). L'objectif commun de ces méthodes est de s'attacher à restaurer, rehausser ou extraire une information présente dans l'image.

En dépit de l'importance de la notion d'*information utile*, l'utilisation de la théorie de l'information est curieusement absente des méthodes de référence de traitement d'images.

La théorie de l'information fournit pourtant un cadre de travail rigoureux dans l'analyse d'images, de sa transmission [9] jusqu'à la modélisation de son acquisition [7]. Elle permet, entre autres, de définir des critères et des mesures d'optimalité d'algorithmes, de qualité visuelle des images [5] ou encore des analyses associées (recalage [8], codage [1] ...). Comme indiqué dans [7], le domaine de la théorie de l'information peut être scindée en deux parties : celle de la communication et celle de l'observation. Les problèmes inhérents à la théorie de la communication ont été définis et formalisés avec succès par Shannon et de nombreux travaux ont depuis largement bénéficié de ces fondements. *A contrario*, les problèmes d'observation d'images et de leur formalisation n'ont pas bénéficié de travaux majeurs comme ceux de Shannon. Pour l'heure une approche courante consiste à considérer une image comme une réalisation d'une variable aléatoire correspondant aux données perturbées collectées par un capteur. Cependant une scène physique est beaucoup plus riche et plus complexe que l'on ne peut ou pourra modéliser. Le besoin d'un cadre informationnel formel permettant de quantifier et de qualifier la manière de restaurer, de rehausser ou d'extraire des informations d'une acquisition s'impose depuis maintenant quelques années [7]. La création d'un tel cadre de travail devrait permettre d'envisager les principes globaux de traitement d'images afin de rejeter les procédures *ad hoc* et de justifier certains résultats.
Dans cet article, nous présentons les aspects théoriques[1] de l'utilisation en traitement d'images et, plus particulièrement en restauration, d'un cadre informationnel emprunté à la physique, celui de l'information physique extrême ou EPI, récemment développé par Frieden [4]. Nous présentons dans un premier temps le principe de l'EPI. Nous montrons ensuite la pertinence d'un tel modèle dans la gestion d'un compromis incertitude imprécision, compromis que nous identifions à la restauration d'images. Nous dérivons les équations régissant un tel compromis. Nous montrons que le paramètre gérant le compromis incertitude imprécision peut s'apparenter à un paramètre d'échelle. Enfin, nous montrons que l'intégration d'*a priori* peut se modéliser par l'intégration dans l'équation finale d'un quadri potentiel.

[1] Les aspects applicatifs directement issus de cette théorie font l'objet d'un autre article soumis par les mêmes auteurs.

2 Information de Fisher et information physique extrême

Si l'on cherche une définition exacte de l'information, on est contraint de constater que celle-ci peut être autant objective que subjective. On peut s'accorder sur le fait que l'information est une quantité, exprimée en bits, qui se définit objectivement comme improbabilité (physique et quantitative) et subjectivement par une réduction de l'incertitude (cognitive et qualitative) [10]. On attribue souvent la paternité de la théorie de l'information à Shannon[2]. Mais bien avant lui, Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) introduit dans ses écrits la notion scientifique d'information. Il montre qu'une statistique est une transformation des données de l'échantillon qui le résume mais aussi le simplifie. Le problème que se pose Fisher relève de la théorie de l'estimation : il s'agit de pouvoir estimer, à partir des échantillons relevés, les valeurs des paramètres caractéristiques des distributions de probabilité d'une population hypothétique. Il propose dans ce cadre un *traitement quantitatif de l'information apportée par un échantillon* qui, s'il ne s'applique pas encore à tous les cas, permet déjà des applications dans le choix des courbes d'erreurs qui permettent de considérer l'échantillon comme étant le plus représentatif possible de la population envisagée [3].
L'information de Fisher représente ainsi la mesure de la qualité d'estimation d'un paramètre, mais elle mesure aussi l'état de désordre d'un système ou d'un phénomène. Elle est aussi reliée à l'erreur quadratique moyenne e^2 commise sur l'estimation de ce paramètre par l'inégalité de Cramer-Rao :

$$e^2 I \geq 1 \tag{1}$$

Cette inégalité montre que la qualité de l'estimation augmente (*i.e.* e diminue) comme I. I est ainsi une *métrique de l'estimation*, et peut donc être appelée *information*.

Soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ respectivement une densité de probabilité caractérisant les fluctuations de la mesure et l'amplitude de probabilité associée $\mathbf{p} = \mathbf{q}^2$, I s'écrit alors :

$$I[\mathbf{q}] = 4 \sum_i \int dx_i \sum_v \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_{iv}} \right)^2 \tag{2}$$

, où $q_i \equiv q_i(x_i)$ est la $i^{\text{ème}}$ amplitude de probabilité pour la fluctuation $x_i = (x_{i1}, ..., x_{ip})$ de la mesure.

I mesure ainsi l'état physique du désordre d'un système, mais aussi la capacité à estimer un paramètre.

L'utilisation de l'information de Fisher, plutôt que celle de Shannon ou de Boltzman, et la prise en compte de l'observateur permettent à Frieden dans [4] de dériver les lois les plus connues de la physique, de la mécanique statistique à la mécanique quantique, de la thermodynamique à la gravité quantique.

Il y définit un principe unificateur de la physique, celui de l'**information physique extrême** ou EPI. La principale particularité de cette information est qu'elle introduit comme élément à part entière de la mesure, l'observateur effectuant cette mesure.

[2] Il est bien le père de la théorie de la *communication*, la paternité de la *théorie de l'information* lui a été attribuée par extension.

Le principe EPI repose sur l'extrémisation d'une quantité obtenue en modifiant l'équation (3), et en posant :

$$\delta(I[\mathbf{q}(\mathbf{x})] - J[\mathbf{q}(\mathbf{x})]) = 0, \quad \text{ou} \quad I - J = Extrem, \tag{3}$$

où J représente l'information de Fisher associée au phénomène mesuré. J caractérise le processus physique. Notons que I et J sont des fonctionnelles à trouver. J, qui a la même unité que I, est appelée *information de Fisher intrinsèque*, sous-entendu, au phénomène mesuré. Autant l'information I a une forme définie, autant J est spécifique au processus étudié. Un résultat particulièrement intéressant de ces travaux indique que l'existence d'une transformation unitaire entre I et J est garant de la validité de l'approche [4]. Dans le cas particulier où le principe d'invariance se traduit par l'existence d'une transformation unitaire entre un espace et son espace conjugué, l'information J se définit comme la réexpression de I dans cet espace conjugué.
Si l'on considère l'équation (3), Frieden définit une nouvelle quantité K, qu'il nomme information physique :

$$K \equiv I - J. \tag{4}$$

K représente une information et plus précisément un manque ou une perte d'information. Déterminer $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ revient à déterminer $K[\mathbf{q}(\mathbf{x})]$ en tant qu'extremum.

$$K = I - J = Extrem. \tag{5}$$

Les solutions $\mathbf{q}$ obtenues sont alors interprétées comme permettant d'obtenir la meilleure mesure de l'information. Une présentation plus complète de l'EPI pourra se trouver dans [6]. En résumé, le principe EPI permet de déterminer les amplitudes de probabilités $\mathbf{q}$ gérant un processus de mesure donné dans le cadre précis d'une mesure, et ce, d'un point de vue informationnel. Il permet également de déterminer le principe variationnel sous-jacent au scénario donné et, à ce titre, se différencie des autres approches de la littérature où les hamiltoniens sont souvent posés de façon *ad hoc* (principe de moindre action). Dans la section suivante, nous proposons une interprétation de ce principe au niveau du traitement d'images comme traduisant un compromis incertitude imprécision. Nous dérivons ensuite les solutions de l'extrémisation de l'information physique du système.

3 Une approche informationnelle de la restauration

Les algorithmes classiques de restauration font souvent évoluer la luminance des pixels de l'image considérée dans le but de supprimer les informations non pertinentes comme le bruit, de créer des zones homogènes ou moins complexes. A partir d'une image acquise, l'objectif principal de la restauration est donc d'obtenir une image plus simple afin de faciliter sa compréhension[3]. La simplification de l'image ne passe pas pour autant par une modification de cette information. La restauration peut donc s'apparenter à un traitement permettant d'obtenir une image à la fois la plus plus simple, mais la plus fidèle possible à l'originale, *i.e.* le meilleur compromis incertitude imprécision. Soit t le paramètre gérant ce compromis. Soit

[3] Einstein disait *comprendre, c'est réduire des phénomènes par un processus logique à quelque chose de déjà connu ou (apparemment) évident*

$u(\mathbf{x},t)$ la structure telle que $u(\mathbf{x},0) = u_{image\_initiale}(\mathbf{x})$. La mesure de l'information de Fisher I sera maximale pour $u_{image\_initiale}(\mathbf{x})$, la mesure se faisant sur l'ensemble des données. De manière générale, I se définit par :

$$I = 4 \int \int d\mathbf{x}dt \left[(\nabla u)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}^2 \right) \right] \tag{6}$$

Dans le cadre d'une problématique *image*, les critères permettant le choix de J ne diffèrent pas de ceux présentés précédemment en physique de la mesure. J doit permettre l'intégration des caractéristiques (ou contraintes) de la diffusion, à savoir la recherche d'un compromis incertitude imprécision optimal. De ce fait, la Transformée de Fourier (TF) apparaît comme un choix naturel d'une transformation unitaire respectant les principes d'invariance du domaine image et transposant l'ensemble des données dans un espace conjugué. En fait, ce sont les propriétés intrinsèques de la TF (propriétés d'incertitude) qui permettent de gérer le compromis incertitude imprécision. L'information de Fisher intrinsèque peut donc être construite comme la réexpression de I dans l'espace de Fourier. J se définit alors comme ([4], [2]) :

$$J = 4 \int \int d\mathbf{x}dtu^2 \tag{7}$$

Le problème de la représentation optimale de l'image initiale par une image simplifiée est donc déterminé de manière unique, et l'information physique associée est donnée par :

$$K \equiv 4 \int \int d\mathbf{x}dt \times \left[(\nabla u)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}^2 \right) - u^2 \right] \tag{8}$$

L'extrémisation de K détermine la solution du principe EPI et nous donne l'évolution $u(\mathbf{x},t)$ permettant de gérer le compromis incertitude imprécision. La solution est l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \triangle u \tag{9}$$

On retrouve l'équation de la chaleur. Ainsi, on peut dès lors identifier le paramètre t gérant le compromis incertitude imprécision à un paramètre d'échelle.

L'application du principe EPI permet ainsi de démontrer que la manière optimale d'extraire des informations d'une image sans connaissance *a priori* est de générer une structure multi-échelles à partir de l'équation de la chaleur. L'approche EPI permet également d'adopter un point de vue informationnel pour la description de la diffusion.

Comme nous l'avons vu, l'équation de diffusion résultant de l'utilisation du principe EPI est donc caractéristique d'une diffusion isotrope, et de ce fait, ne permet pas la prise en compte d'informations particulières dans l'image. Nous proposons un enrichissement du modèle afin de dériver du principe EPI une équation de diffusion plus générale anisotrope et paramétrable. Pour ce faire, nous proposons le changement de variable suivant :

$$\nabla \rightarrow \nabla - \mathbf{A} \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \phi \tag{11}$$

où $\mathbf{A}$ est un potentiel vectoriel et ϕ un potentiel scalaire. Frieden montre que cette introduction est valide et n'interdit pas l'application du principe EPI [4].La solution au principe EPI devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\nabla - \mathbf{A}).(\nabla - \mathbf{A})u + \phi u. \tag{12}$$

Les potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ permettent d'intégrer des contraintes sur l'évolution de l'image au cours du processus de diffusion. Plus précisémment, $\mathbf{A}$ agit comme un potentiel s'appliquant le long de l'axe des échelles et contraint l'image à n'être lissée que dans des directions particulières. Le potentiel ϕ peut être, quant à lui, interprété comme un terme d'attache aux données initiales permettant de contraindre l'évolution de la diffusion vers une solution cohérente par rapport a l'image initiale. Des choix particuliers pour $\mathbf{A}$ et ϕ permettent alors, à partir de l'équation précédente, de retrouver des résultats classiques de diffusion [2]. Nous rappelons que les résultats applicatifs sont quant à eux proposés dans un article des mêmes auteurs.

4 Conclusions & Perspectives

Nous avons proposé un formalisme informationnel original fondé sur la prise en compte du compromis incertitude imprécision dans la restauration d'images. Cette approche permet dans un premier temps de proposer une approche originale, mais aussi de définir une équation de diffusion gérer seulement par un quadri potentiel. Nous avons identifié un paramètre de simplification d'images avec le paramètre d'échelle classique. A noter que ce paramètre n'est pas introduit de manière *ad hoc*.

Références

1. E. Charpentier and N. Nikolski. *L'héritage de Kolmogorov en mathématiques*. Belin, 2004.
2. V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, and P. Courtellemont. Une nouvelle approche du filtrage linéaire optimal dans le cadre de l'information physique extrême. In *Proc. RFIA 2002, Angers, France*, 2002.
3. R.A. Fisher. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 222 :309–368, 1922.
4. B. R. Frieden. *Physics from Fisher Information*. Cambridge University Press, 1998.
5. A. J. Maeder. The image importance approach to human vision based image quality characterization. *Pattern Recognition Letters*, 26(3) :347–354, February 2005.
6. M. Menard, V. Courboulay, and P.A. Dardignac. Possibilistic and probabilistic fuzzy clustering : unification within the framework of the non-extensive thermostatistics. *Pattern Recognition*, 36(6) :1325–1342, June 2003.
7. J. O'Sullivan, R. Blahut, and D. Snyder. Information-theoretic image formation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6) :2094–2123, October 1998.
8. N. Rougon, C. Petitjean, and F. Prêteux. Recalage variationnel non rigide d'images par f-information exclusive. *GRETSI'03*, 2003.
9. C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423 and 623–656, Juillet and October 1948.
10. J. Zin. Le concept d'information. http ://www.globenet.org/transversales/grit/, January 2003.